

cea mai semnificativă este aceea de a constitui un sistem logico-deductiv; ilustrarea în învățămînt a acestei caracteristici obligă profesorul de matematică să mediteze atent asupra fundamentelor matematicii. Cartea expune succint elementele necesare de teoria mulțimilor, construcția diverselor clase de numere și conceptul de teorie axiomatică, fundamental în matematica actuală. Principalele probleme metateoretice sînt studiate pentru axiomatica lui Peano a numărului întreg și pentru diverse construcții logico-deductive ale geometriei.

Sînt prezentate în lucrare axiomaticile atît de actuale în învățămîntul liceal ale lui David Hilbert și George Birkhoff și, în strînsă conexiune cu acestea, bazele algebrice ale geometriei, teoria transformărilor geometrice, programa de la Erlangen și sistemul axiomatic al lui Bachmann.

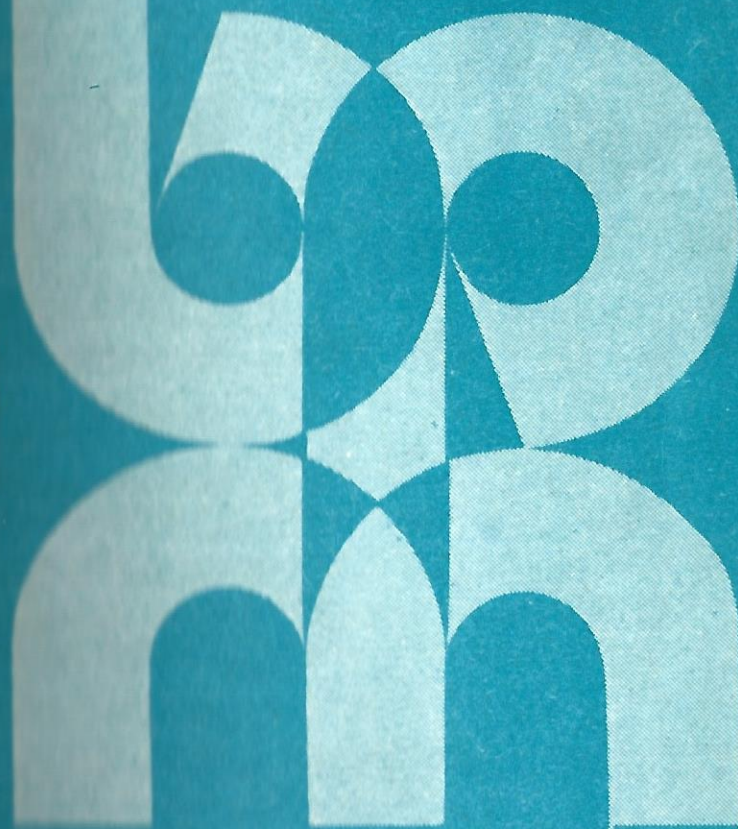
Intenția autorilor de a sublinia elemente esențiale ale fundamentelor geometriei s-a materializat în expuneri moderne ce au și pronunțat caracter de originalitate, mai ales în capitolele III, VIII și IX.

Cartea va fi deosebit de utilă tuturor profesorilor de matematică, studenților și unor elevi pasionați de matematică.

# Fundamentele aritmeticii și geometriei

Radu MIRON

Dan BRÂNZEI



Lei 17,50

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA





Biblioteca  
profesorului de matematică

---

# FUNDAMENTELE ARITMETICII ȘI GEOMETRIEI

de Radu MIRON  
Dan BRÂNZEI

## COLECTIVUL DE CONDUCERE AL COLECȚIEI

Acad. CAIUS IACOB, președintele Secției de științe matematice a Academiei Republicii Socialiste România.

Acad. NICOLAE TEODORESCU, președintele Societății de matematică din Republica Socialistă România.

Conf. VALENTIN BOJU, Universitatea din Craiova.  
Prof. RADU MIRON, Universitatea „Al. I. Cuza” Iași, coordonator.

Prof. DAN PAPUC, Universitatea din Timișoara.

Prof. IOAN PURDEA, Universitatea „Babeș-Bolyai” Cluj-Napoca.

Prof. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ, Institutul politehnic București.

ION SUCIU, cercetător principal II, Secția matematică INCREȘT.



EDITURA ACADEMIEI  
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA  
București, 1983



THE FOUNDATIONS OF ARITHMETICS  
AND GEOMETRY

ОСНОВЫ АРИФМЕТИКИ И ГЕОМЕТРИИ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA  
R.79717, Bucureşti, Calea Victoriei nr. 125

PREFATĂ

Există părerea că fundamentele matematicii alcătuiesc o parte a matematicii complet ruptă de rest şi care ar interesa doar un număr restrâns de cercetători. În sprijinul acestei păreri se aduc şi „argumente”: numerele naturale au fost folosite în mod eficient cu milenii înaintea definirii lor pe baza sistemului axiomatic al lui Peano, numerele reale au fost utilizate corect de anticii greci deşi începutul definirii lor se realizează abia în evul mediu, mulţimile au preluat rolul de temelie a matematicii pe baza teoriei naive a lui Cantor cu mult înaintea edificării unei teorii logice riguroase.

Această părere este profund greşită. În primul rînd, în matematica actuală nu este posibilă o delimitare nici măcar vagă a fundamentelor ei. În al doilea rînd, eforturile de fundamentare a matematicii au apărut foarte timpuriu, opera monumentală a lui Euclid constituind un exemplu indiscutabil. Putem spune că matematica a evoluat prin milenii în strînsă unitate cu fundamentarea ei şi cunoaşterea acestui fapt este un element esenţial al culturii generale. Matematicianul român Dan Barbilian, bine cunoscut şi ca poet de excepţie Ion Barbu, a sintetizat acest adevăr într-o frază remarcabilă pentru matematică, istorie şi pentru filosofia culturii: „Poarta prin care poţi aborda lumea greacă nu este obligatoriu Homer. Geometria greacă e o poartă mai largă, din care ochiul cuprinde un peisagiu auster, dar esenţial” (Ion Barbu, *Pagini de proză*, E.P.L., Bucureşti, 1968, p. 229).

Rostul şcolii nu este acela de a însuma nişte cunoştinţe, ci acela de a forma capacităţi de gîndire creatoare, nedogmatică, lipsită de prejudecăţi. Dacă matematica ar putea fi ruptă de fundamentele ei, ar deveni o înşiruire de formule, reţete şi tautologii ce nu s-ar mai aplica în realitatea obiectivă, ci doar în unele scheme rigide, mortificate ale acestei realităţi. Subordonată scopului formării omului



nou, multilateral dezvoltat, școala noastră evită cu atenție și perseverență orice tentativă spre dogmatism.

Actuala modalitate de predare a matematicii în liceele țării noastre exprimă un remarcabil echilibru între construcțiile matematice concrete și fundamentarea lor logică riguroasă. Dar acest echilibru este dinamic, variabil de la an la an și de la clasă la clasă. Profesorul de matematică trebuie în mod indiscutabil să realizeze buna însușire a programei. Dar rolul său major este acela de a forma concomitent capacitatea crescândă de gândire creatoare a elevilor; bine informat asupra fundamentelor disciplinei ce le predă, el va găsi momentele și modalitățile de a sugera sau a explica largile orizonturi ale matematicii contemporane.

Lucrarea oferă o înțelegere unitară a „geometriei elementare” și a legăturii ei organice cu studiul numerelor reale.

În primele două capitole se pornește de la teoria naivă a mulțimilor, se expune succint teoria numerelor cardinale și ordinale pentru a construi apoi consecutiv mulțimile numerice  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $C$ , împreună cu structurile lor uzuale.

Capitolul III prezintă conceptul de teorie axiomatică, fundamental în matematica actuală și problematica metateoriei lor. Subiectul este exemplificat reconstruind mulțimea  $N$  a numerelor naturale pe baza sistemului axiomatice al lui Peano. Se conturează astfel cea de a doua modalitate majoră de fundamentare a aritmeticii.

Capitolul IV prezintă „bazele algebrice” ale geometriei. Problematika acestui capitol constituie o contribuție recentă și importantă a matematicii românești, în special a primului autor al cărții. Apare aici construcția pe baza unor sisteme axiomatice minimale a conceptelor de spațiu liniar, afin și euclidian, deci o primă modalitate de fundamentare a geometriei.

Capitolul V edifică geometria pe baza sistemului axiomatice al lui Hilbert. Se acordă aici atenția cuvenită deducerii unor prime consecințe ale axiomelor considerându-se cunoscut modul de trecere de la aceste prime consecințe la rezultatele centrale ale geometriei euclidiene.

În capitolul VI se corelează axiomaticele lui Hilbert cu cea a lui Birkhoff, adoptată relativ recent în didactica geometriei din țara noastră.

Capitolul VII prezintă succint principalele tipuri de transformări geometrice, acțiunile lor asupra figurilor geometrice fundamentale și rezultatele compunerii unor transformări geometrice.

Capitolul VIII expune într-o manieră modernă concepția lui Felix Klein asupra geometriilor și o exemplifică prin studiul geometriilor afine, proiective și hiperbolice plane.

Capitolul IX este redactat de prof. dr. Francisc Radó, de la Facultatea de matematică a Universității „Babeș-Bolyai” din Cluj-Napoca, și prezintă un sistem axiomatice al geometriei având ca noțiune primară centrală izometria. Prof. Radó a studiat cu atenție întregul manuscris și a făcut observații pertinente de mare utilitate.

Lucrarea conține două anexe ce prezintă într-un limbaj accesibil concepțiile autorilor asupra didacticii geometriei și axiomatizării ei.

Se evidențiază unitatea lucrării, ca o reflectare a caracterului unitar al matematicii în general și al geometriei în special. Cartea este complet accesibilă elevilor din ultimele clase de liceu, dar este exclusă interpretarea ei ca manual; în primul rând, lectura ei este presupusă a fi succesivă unui prim studiu sistematic al geometriei pe baza unui sistem axiomatice. În al doilea rând, s-a renunțat destul de frecvent la amănunte cu caracter tehnic pentru a scoate în evidență ideile și conexiunile lor.

Așa cum am afirmat deja, lucrarea este destinată în primul rând colegului nostru, profesorul de matematică; ne place să credem că l-am informat fidel asupra geometriei elementare contemporane, sprijinindu-l astfel în nobila, dar dificila sa misiune de a transmite tinerei generații frumusețea matematicii și în special a geometriei. Considerăm lucrarea foarte utilă și studenților facultăților de matematică pentru sistematizarea concepției asupra matematicii ca disciplină unitară.

AUTORII



## ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

Teoria mulțimilor are importanță fundamentală în matematica actuală. Din punctul de vedere al logicienilor, matematica este teoria mulțimilor și consecințelor ei.

În cele ce urmează pe conceptul de mulțime este bazată construcția numerelor naturale, a celorlalte numere cunoscute, iar noțiunea de structură matematică este privită ca o mulțime de elemente supuse unui sistem de axiome.

O prezentare riguroasă a noțiunii de mulțime nu este simplă. Descrierea ei axiomatică se face printr-un proces complicat. Din acest motiv ne plasăm aici în punctul de vedere naiv, conform căruia noțiunea de mulțime este presupusă cunoscută.

## § 1. ALGEBRA MULȚIMILOR

Vom nota mulțimile cu  $A, B, C, \dots$ , elementele unor mulțimi prin  $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$  etc. și vom utiliza simbolurile logice  $=, \Rightarrow, \forall, \exists$  etc., ale căror sensuri le considerăm cunoscute.

O mulțime va fi dată adesea prin anume proprietăți ale elementelor sale. Vom scrie  $\{x : P(x)\}$ , unde  $P(x)$  este o propoziție referitoare la  $x$ , aceasta însemnând mulțimea tuturor acelor  $x$ , încât  $P(x)$  este adevărată. Din punctul de vedere pe care l-am adoptat, termenii „proprietate” și „mulțime” sînt sinonimi.

Dacă  $x$  este element al mulțimii  $A$ , vom scrie  $x \in A$ , în timp ce  $x \notin A$  înseamnă „ $x$  nu este element al mulțimii  $A$ ”.

Vom admite existența unei mulțimi, notată cu  $\emptyset$ , care nu are nici un element.

Pentru orice  $x$ ,  $\{x\}$  va nota mulțimea care conține numai elementul  $x$ . În mod analog  $\{x_1, \dots, x_n\}$  va fi mulțimea care conține numai elementele  $x_1, \dots, x_n$  (presupuse distincte).

**Definiția 1.1.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Vom spune că  $A$  este *submulțime* a lui  $B$  sau că  $A$  este *inclusă* sau este *parte* a lui  $B$ , dacă  $x \in A \Rightarrow x \in B$  și vom scrie  $A \subset B$ . Dacă  $A \subset B$  și  $B \subset A$  vom



spune că mulțimile  $A$  și  $B$  sînt egale și notăm cu  $A = B$ , iar negația ei o notăm prin  $A \neq B$ .

Dacă  $A \subset B$ ,  $A \neq B$ , atunci  $A$  se numește *submulțime proprie* a lui  $B$ . Se notează această proprietate prin  $A \subsetneq B$ . Urmează că  $A \subset B$  înseamnă  $A \subsetneq B$  sau  $A = B$ .

Din definiția incluziunii se deduce:

1°  $A \subset A$  (reflexivitate);

2°  $A \subset B$ ,  $B \subset C \Rightarrow A \subset C$  (tranzitivitate);

3°  $A \subset B$ ,  $B \subset A \Rightarrow A = B$  (antisimetrie).

Proprietatea de antisimetrie exprimă faptul că o mulțime  $A$  este complet caracterizată prin totalitatea elementelor ce îi aparțin; de exemplu  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_2, x_4, x_3, x_1\}$ .

Desigur, pentru orice mulțime  $A$  are loc  $\emptyset \subset A$ , urmează imediat că mulțimea vidă este unică.

**Definiția 1.2.** Mulțimea  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ sau } x \in B\}$  se numește *reuniunea mulțimilor*  $A$  și  $B$ .

Această definiție se extinde la o familie oarecare de mulțimi  $\{A_i\}_{i \in I}$  și se scrie  $\bigcup_{i \in I} A_i$ . Atragem atenția că utilizăm termenul de „familie” sinonim cu cel de mulțime pentru a evita repetiții supărătoare.

**Definiția 1.3.** Mulțimea  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ și } x \in B\}$  se numește *intersecția mulțimilor*  $A$  și  $B$ .

Extinzînd această definiție la o familie oarecare de mulțimi,  $\{A_i\}_{i \in I}$ , avem  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I \Rightarrow x \in A_i\}$ .

Se notează cu  $\mathcal{P}(A)$  mulțimea submulțimilor lui  $A$ . Atunci  $A \in \mathcal{P}(A)$ ,  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  și  $M \subset A \Rightarrow M \in \mathcal{P}(A)$ .

**Teorema 1.1.** Pentru orice mulțimi  $A, B, C$  au loc:

$$\begin{array}{ll} A \cup B = B \cup A, & A \cap B = B \cap A \quad (\text{comutativitate}); \\ A \cup A = A, & A \cap A = A \quad (\text{idempotență}); \\ A \cup \emptyset = A & A \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (\text{asociativitate}); \\ A \subset A \cup B, & A \cap B \subset A; \\ A \subset B \Rightarrow A \cup B = B, & A \subset B \Rightarrow A \cap B = A. \end{array}$$

Demonstrația acestei teoreme este imediată; o lăsăm în seama cititorului. De asemenea se arată ușor că are loc:

**Teorema 1.2.** (Legile de distributivitate).

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

**Definiția 1.4.** Mulțimea  $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$  se numește *diferența mulțimilor*  $A$  și  $B$ . Mulțimea  $\complement_A B = A \setminus B$ , pentru  $B \subset A$ , se numește *complementara mulțimii*  $B$  în raport cu  $A$ . Dacă  $A$  este fixată,  $\complement_A B$  se notează cu  $\bar{B}$  și se numește simplu *complementara* lui  $B$ , iar  $A$  se numește mulțime universală.

Se deduce imediat

$$A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}; \quad \bar{\bar{A}} = A, \quad \complement_A \emptyset = A, \quad \complement_A A = \emptyset.$$

**Teorema 1.3.** (Legile lui de Morgan):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i; \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i.$$

Demonstrația nu comportă dificultăți.

Din ultimele trei teoreme urmează **principiul de dualitate** din teoria mulțimilor:

Din orice relație generală între mulțimi, care face să intervină operațiile  $\cup, \cap, \subset, \supset$  se obține o nouă relație, adevărată, înlocuind operațiile precedente, respectiv prin  $\cap, \cup, \supset, \subset$  și mulțimea vidă  $\emptyset$  cu mulțimea universală  $A$  și reciproc.

Dacă mulțimile  $A$  și  $B$  au proprietatea  $A \cap B = \emptyset$ , atunci  $A$  și  $B$  se numesc *mulțimi disjuncte*.

Fie  $a, b$  elemente distincte; mulțimea  $\{a, b\}$  permite să cunoaștem această pereche de elemente fără a preciza care este „primul” și care este „al doilea”. Putem privilegia unul dintre aceste elemente, de exemplu  $a$ , pentru a-l considera primul dînd mulțimea  $\{\{a, b\}, a\}$  ce o notăm mai succint prin  $(a, b)$  și o numim *pereche ordonată* sau *cuplu*. Simbolul  $(a, b)$  se consideră și în cazul  $a = b$  dar acum notează mulțimea  $\{a, \{a\}\}$ .



Cuplul  $(a, (b, c))$  permite identificarea elementelor  $a, b, c$  dar și o ordonare a lor; este notat mai simplu  $(a, b, c)$  și este numit *triplet ordonat*.

Pentru o mulțime  $A$  oarecare, mulțimea  $\tilde{A} = \{(x, A) : x \in A\}$  se numește *asociată* cu  $A$ .

Să observăm că  $A = B \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$  și  $A \neq B \Rightarrow \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$ .

**Definiția 1.5.** Fie  $\{A_i\}_{i \in I}$  o familie oarecare de mulțimi. Mulțimea

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i$$

se numește *reuniunea disjunctă a mulțimilor familiei* considerate. Dacă familia conține doar două mulțimi (distincte)  $A, B$  pentru reuniunea lor disjunctă se folosește și notația  $A \vee B$ . Această notație se utilizează și când  $A = B$ , sensul ei fiind însă precizat acum prin  $A \vee B = A \cup \tilde{A}$ .

## § 2. RELAȚII BINARE ȘI FUNCȚII

Noțiunile de relație și de funcție sînt de interes general. Le vom expune succint.

Dacă  $X$  și  $Y$  sînt două mulțimi, atunci  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  se numește *produsul lor cartezian*.

**Definiția 2.1.** O relație binară  $\rho$  este un triplet ordonat  $\rho = (X, Y, G)$ , unde  $X$  și  $Y$  sînt mulțimi (numite *mulțimi bază ale lui  $\rho$* ) și  $G \subset X \times Y$ . (Mulțimea  $G$  se numește *graficul relației  $\rho$* .) În locul notației  $(x, y) \in G$  se preferă notația  $x \rho y$  (se citește : „ $x$  este în relația  $\rho$  cu  $y$ ”).

Desigur, atunci cînd mulțimile bază  $X, Y$  sînt subînțelese din context relația binară  $\rho$  este precizată de graficul ei,  $G$ , dar aceasta nu înseamnă că o relație binară ar coincide cu graficul ei.

Pentru relația binară  $\rho = (X, Y, G)$  se consideră mulțimile  $\text{dom } \rho = \{x : \exists y, x \rho y\}$  și  $\text{codom } \rho = \{y : \exists x, x \rho y\}$  numite *domeniul* și respectiv *codomeniul* relației binare  $\rho$ .

Relația binară  $\rho^{-1} = (Y, X, G')$  caracterizată prin  $y \rho^{-1} x \Leftrightarrow x \rho y$  se numește *inversa* relației  $\rho$ .

Evident,  $\text{dom } \rho^{-1} = \text{codom } \rho$  și  $\text{codom } \rho^{-1} = \text{dom } \rho$ .

**Definiția 2.2.** Fie  $\rho = (X, Y, G)$  și  $\sigma = (Y, Z, H)$  relații binare; numim *compunere* a acestor relații binare relația binară  $\sigma \circ \rho = (X, Z, K)$ , unde

$$x \sigma \circ \rho z \Leftrightarrow \exists y, x \rho y \text{ și } y \sigma z.$$

Un caz particular important al relațiilor binare îl constituie relațiile *omogene* cînd cele două mulțimi bază coincid. Deși pentru relația binară  $\rho = (X, X, G)$  are loc  $G \subset X^2$  se spune că  $\rho$  este *relație binară pe mulțimea  $X$* .

Printre relațiile binare omogene se remarcă drept deosebit de importante relațiile de echivalență și de ordine.

### RELATII DE ECHIVALENȚĂ

**Definiția 2.3.** Relația binară  $\rho = (X, X, G)$  este o echivalență (pe mulțimea  $X$ ) dacă satisface condițiile :

1° este *reflexivă*, adică  $x \in X \Rightarrow x \rho x$ ;

2° este *simetrică*, adică  $x \rho y \Rightarrow y \rho x$ ;

3° este *transitivă*, adică  $x \rho y$  și  $y \rho z \Rightarrow x \rho z$ .

Pentru o astfel de relație binară unui element arbitrar  $x \in X$  i se asociază *clasa sa de echivalență*  $\rho_x = \{y : y \rho x\}$ . Pentru elemente distincte  $x, y$  clasele de echivalență  $\rho_x, \rho_y$  sînt disjuncte sau coincid. Datorită proprietății de reflexivitate orice element  $x$  din  $X$  aparține măcar unei clase de echivalență ( $x \in \rho_x$ ) deci  $\bigcup_{x \in X} \rho_x = X$ .

Mulțimea  $X/\rho = \{\rho_x : x \in X\}$  se numește *mulțime factor* sau *mulțime cît a lui  $X$  prin relația  $\rho$* ; elementele sale sînt clasele de echivalență și alcătuiesc o *partiție* a mulțimii  $X$ . Partiția  $X/\rho$  determină evident unic echivalența  $\rho$ . Aplicația  $\pi : X \rightarrow X/\rho$  definită prin  $\pi(x) = \rho_x$  se numește *proiecția canonică a echivalenței  $\rho$* .

### RELATII DE (PARȚIALĂ) ORDONARE

**Definiția 2.4.** Relația binară  $\leq = (X, X, G)$  se numește *ordonare (parțială)* a mulțimii  $X$  dacă este reflexivă, tranzitivă și „*antisimetrică*”, adică  $(x \leq y \text{ și } y \leq x) \Rightarrow x = y$ . Adjectivul „parțială” poate fi omis și va fi înlocuit prin „totală” atunci cînd are loc proprietatea de „trihotomie”

$$\forall x, y \in X \quad x \leq y \text{ sau } y \leq x.$$



Pentru relații de ordine se folosesc în general simboluri de forma  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $\leqslant$ ,  $\geqslant$  ce au avantajul că permit notații [sugestive și comode pentru inverse ( $\geq$  în loc de  $\leq^{-1}$  etc.) și pentru „ordonările stricte” (de exemplu,  $x < y$  înseamnă  $x \leq y$  și  $x \neq y$ ).

## FUNCTII

**Definiția 2.5.** Relația binară  $f = (X, Y, G)$  se numește *univocă*, *univalentă* sau *aplicație parțială* dacă are loc

$$\forall x \in X (x f y \text{ și } x f z) \Rightarrow y = z.$$

**Definiția 2.6.** Se numește funcție (de la  $X$  la  $Y$ ) o relație binară  $f = (X, Y, G)$  ce este univocă și „completă”, adică  $\text{dom } f = X$ . Precizăm că  $f$  este funcție folosind notația  $f: X \rightarrow Y$ .

Inversa  $f^{-1}$  a unei funcții  $f = (X, Y, G)$  este relație binară dar în general nu este funcție; dacă  $f^{-1}$  este univocă se spune că  $f$  este *injectivă*, dacă  $f^{-1}$  este completă se spune că  $f$  este *surjectivă*, dacă  $f^{-1}$  este funcție se spune că  $f$  este *bijectivă* sau (*corespondență*) *biunivocă*.

## § 3. NUMERE CARDINALE

Presupunem fixată o mulțime  $U$  (un „univers”) și orice mulțimi  $X$  ce le vom considera ulterior vor fi presupuse elemente din  $U$ . Deși alegerea unui astfel de univers nu influențează în mod esențial construcțiile ce vor urma, o astfel de alegere este necesară pentru a evita apariția unor antinomii.

Se definește o echivalență  $\sim$  pe universul  $U$  spunând că are loc  $A \sim B$  dacă există o bijecție  $f: A \rightarrow B$ . Relația  $\sim$  se numește *echipotență* și este evident o echivalență.

**Definiția 3.1.** Se numește *număr cardinal* (în universul  $U$ ) o clasă de echivalență în raport cu echipotența  $\sim$ . Clasa de echipotență a unei mulțimi  $A$  se va numi *cardinalul lui A* (în  $U$ ) și va beneficia de notația  $\bar{A}$ .

Pentru anumite mulțimi particulare (presupuse a fi în  $U$ ) apar notații speciale ca de exemplu  $\bar{0} = 0$ ,  $\bar{\{a\}} = 1$ ,  $\bar{\{a, \{a\}\}} = 2$  etc.

Atragem atenția că pentru teoria ce urmează nu este necesară cunoașterea numerelor și a mulțimilor de numere  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ce vor fi definite în capitolul următor tocmai pe baza unei teorii a cardina-

lilor. Presupunând aceste mulțimi cunoscute intuitiv și familiare le vom utiliza în unele *exemple* ce nu pot crea un cerc vicios pentru teorie.

De exemplu vom considera cardinalul  $\aleph_0$  (se citește „alef zero”) al lui  $\mathbb{N}$  și cardinalul  $c$  al lui  $\mathbb{R}$ . Dacă  $n$  este un număr natural arbitrar vom nota tot prin  $n$  și cardinalul mulțimii  $\{x: x \in \mathbb{N} \text{ și } x < n\}$ . Deși această dublă semnificație a unei notații poate crea confuzii o apreciem pentru meritul ei de a sugera interpretarea numerelor naturale drept cardinali ai unor mulțimi speciale („finite”), sugestie ce va fi explicitată în capitolul următor.

Pentru a asigura posibilitatea unor construcții ce urmează și rigoarea unor propoziții, vom presupune că universul  $U$  este „suficient de amplu”; de exemplu pentru  $A \in U$  și  $B \in U$  vom presupune că  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \times B$  și  $\{f: B \rightarrow A\}$  sînt tot elemente din  $U$ ; vom mai presupune de asemenea că  $\mathcal{P}(A)$  este de asemenea în  $U$  (mulțimea  $\mathcal{P}(A)$  se numește *mulțimea părților lui A*).

**Teorema 3.1.** Dacă  $A_1 \sim A_2$  și  $B_1 \sim B_2$ , atunci:

$$1^\circ \bar{A}_1 \sim \bar{A}_2, \bar{B}_1 \sim \bar{B}_2$$

$$2^\circ A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$$

$$3^\circ A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$$

$$4^\circ \{f: B_1 \rightarrow A_1\} \sim \{g: B_2 \rightarrow A_2\}.$$

**Demonstrație.**  $1^\circ$  Fie  $f: A_1 \rightarrow A_2$  o bijecție; atunci aplicația  $\tilde{f}: \bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_2$  dată de  $\tilde{f}(a, A_1) = (f(a), A_2)$  este o bijecție.

$2^\circ$  Fie  $A_1 \neq B_1$ , deci  $\bar{A}_1 \cap \bar{B}_1 = \emptyset$ ; bijecțiile  $\tilde{f}: \bar{A}_1 \rightarrow \bar{A}_2$ ,  $\tilde{g}: \bar{B}_1 \rightarrow \bar{B}_2$  determină bijecția  $F: \bar{A}_1 \cup \bar{B}_1 \rightarrow \bar{A}_2 \cup \bar{B}_2$ , prin  $F(a, A_1) = \tilde{f}(a, A_1)$  și  $F(b, B_1) = \tilde{g}(b, B_1)$ . [Am presupus și  $A_2 \neq B_2$ .]

$3^\circ$  Dacă  $f: A_1 \rightarrow A_2$ ,  $g: B_1 \rightarrow B_2$  sînt bijecții, atunci  $f \times g: A_1 \times B_1 \rightarrow A_2 \times B_2$ , definită prin  $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$  este o bijecție.

$4^\circ$  Fie  $h_1: A_1 \rightarrow A_2$ ,  $h_2: B_1 \rightarrow B_2$  două bijecții și  $f: B_1 \rightarrow A_1$  o aplicație oarecare. Atunci  $F(f) = h_1 \circ f \circ h_2^{-1}$ ,  $\forall f$  este o aplicație bijectivă de la  $\{f: B_1 \rightarrow A_1\}$  la  $\{g: B_2 \rightarrow A_2\}$ . q.e.d.

**Definiția 3.2.** Fie  $a = \bar{A}$ ,  $b = \bar{B}$ .  $1^\circ$  Se numește *sumă a numerelor cardinale a și b* numărul cardinal, notat  $a + b$ , al mulțimii  $A \cup B$ .

$2^\circ$  Se numește *produs al numerelor cardinale a și b*, numărul cardinal, notat  $ab$ , al mulțimii  $A \times B$ .



3° Prin  $a$  ridicat la puterea  $b$  înțelegem numărul cardinal  $a^b$  al mulțimii aplicațiilor de la  $B$  la  $A$ ,  $\{f: B \rightarrow A\}$ .

Utilizând teorema 3.1 se verifică ușor că numerele cardinale  $a + b$ ,  $ab$  și  $a^b$  nu depind de reprezentanții  $A$ ,  $B$  ce se aleg pentru cardinalii  $a$ ,  $b$ .

**Teorema 3.2.** Oricare ar fi numerele cardinale  $a, b, c$ , au loc proprietățile:

$$1^\circ a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$2^\circ a + b = b + a;$$

$$3^\circ a(b + c) = ab + ac;$$

$$4^\circ a(bc) = (ab)c;$$

$$5^\circ ab = ba;$$

$$6^\circ a^b \cdot a^c = a^{b+c};$$

$$7^\circ a^c \cdot b^c = (ab)^c;$$

$$8^\circ (a^b)^c = a^{bc}.$$

Toate aceste proprietăți se dovedesc utilizând definiția 3.2 și teorema 3.1.

**Definiția 3.3.** Vom spune că numărul cardinal  $a = \bar{A}$  este mai mic sau egal decât numărul cardinal  $b = \bar{B}$ , și scriem  $a \leq b$ , dacă există o submulțime  $B'$  în  $B$  așa ca  $A \sim B'$ . (Vom scrie  $a < b$  dacă  $a \leq b$ ,  $a \neq b$ .) S-a definit astfel o relație binară  $\leq$  pe mulțimea  $U/\sim$  a cardinalilor universului  $U$ .

**Propoziția 3.1.**  $a, b, c$  fiind numere cardinale:

$$1^\circ a \leq a; \quad 2^\circ a \leq b, \quad b \leq c \text{ implică } a \leq c.$$

Într-adevăr,  $A \sim A$  are loc, deci  $1^\circ$  este verificată. Din  $A \sim B'$ ,  $B' \subset B$ ,  $B \sim C'$ ,  $C' \subset C$  rezultă  $A \sim C''$ ,  $C'' \subset C$  și  $2^\circ$  este dovedită.

Prin această propoziție ne asigurăm că relația binară  $\leq$  introdusă mai sus este reflexivă și tranzitivă; teorema ce urmează va asigura și antisimetria acestei relații.

**Teorema 3.3.** (Bernstein). Fie  $a = \bar{A}$ ,  $b = \bar{B}$ . Dacă  $a \leq b$  și  $b \leq a$ , atunci  $a = b$ .

**Demonstrație.** Prin ipoteză există aplicațiile bijective  $f: A \rightarrow B'$ ,  $B' \subset B$ ,  $g: B \rightarrow A'$ ,  $A' \subset A$ . Definim funcția  $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  prin

$$(1) \quad \varphi(E) = A \cap \overline{[g(B \cap f(E))]}.$$

Se vede ușor că  $\varphi$  are proprietatea de „monotonie”:

$$(2) \quad E \subset F \Rightarrow \varphi(E) \subset \varphi(F).$$

Considerăm mulțimea  $\mathcal{D} = \{E: E \in \mathcal{P}(A) \text{ și } E \subset \varphi(E)\}$ . Rezultă  $\emptyset \in \mathcal{D}$ . Fie apoi  $D = \bigcup \mathcal{D}$ . Cum  $E \subset D$ , pentru fiecare  $E \in \mathcal{D}$ , (2) implică  $E \subset \varphi(E) \subset \varphi(D)$ ,  $\forall E \in \mathcal{D}$ . Deci  $D \subset \varphi(D)$ . Aplicăm din nou proprietatea (2) a funcției  $\varphi$  și avem  $\varphi(D) \subset \varphi(\varphi(D))$ . Rezultă  $\varphi(D) \in \mathcal{D}$ . Avem și incluziunea inversă  $D = \bigcup \mathcal{D} \supset \varphi(D)$ . Deci  $D = \varphi(D)$ . Aplicând (1) rezultă  $D = A \cap \overline{[g(B \cap f(D))]}$ . Atunci  $A \cap \bar{D} = g(B \cap \bar{f(D)})$ . Urmează că funcția  $h$  definită prin

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru } x \in D \\ g^{-1}(x) & \text{pentru } x \in A \setminus D \end{cases}$$

realizează o bijecție a lui  $A$  cu  $B$ . q.e.d.

**Corolarul 3.1.** Pe mulțimea numerelor cardinale,  $\leq$  este o relație de ordonare (parțială).

**Exemple.** Avem  $0 < n < \aleph_0 < c$ .

Mulțimile care nu au cardinalul  $0$ ,  $n$  se numesc infinite. Mulțimile  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  au cardinalul  $\aleph_0$ . Mulțimile infinite au proprietatea caracteristică dovedită de Dedekind, anume au același cardinal cu o submulțime proprie.

**De exemplu.**  $\overline{(0,1)} = \overline{[0,1]} = \overline{[0,1]} = \bar{\mathbb{R}} = c$ .

În adevăr, funcția  $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \frac{1-2x}{x(1-x)}$

este bijectivă. Deci  $\overline{(0,1)} = c$ . În mod analog se verifică și celelalte egalități.

**Teorema 3.4.** (Cantor). Pentru orice număr cardinal  $a$ , avem  $a < 2^a$ .

**Demonstrație.** Fie  $\bar{A} = a$  și  $\mathcal{P}_1(A) \subset \mathcal{P}(A)$  familia submulțimilor lui  $A$  formate din câte un singur element. Avem atunci  $A \sim \mathcal{P}_1(A)$ . Urmează  $a = \bar{A} = \overline{\mathcal{P}_1(A)} \leq \overline{\mathcal{P}(A)}$ . Dar  $a \neq \overline{\mathcal{P}(A)}$ . În adevăr, să



admitem prin absurd  $a = \overline{\mathcal{P}(A)}$ . Există atunci o bijecție  $h: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ . Definim  $S = \{x \in A : x \notin h(x)\}$ . Cum  $S \subset A$ , avem  $S \in \mathcal{P}(A)$  și, pentru că  $h$  este o bijecție, există  $x_0 \in A$  cu proprietatea  $h(x_0) = S$ . Dacă  $x_0 \in S$ , atunci din definiția mulțimii  $S$  avem  $x_0 \notin h(x_0) = S$ . Deci  $x_0 \notin S$ . Însă  $S$  este mulțimea  $h(x_0)$  și  $x_0 \notin h(x_0)$  implică  $x_0 \in S$ . Această contradicție arată că  $a \neq \overline{\mathcal{P}(A)}$ . Așadar  $a < \overline{\mathcal{P}(A)}$ .

Să arătăm acum că  $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^a = \overline{\{f: A \rightarrow \{0, 1\}\}}$ . În acest scop fie funcția  $\xi_{A'}: A \rightarrow \{0, 1\}$ , ( $A' \subset A$ ), definită prin

$$\xi_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A' \\ 0 & \text{dacă } x \in C_{A'}A', \end{cases}$$

numită funcția caracteristică a submulțimii  $A'$  din  $A$ .

Considerăm acum aplicația  $\varphi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{f: A \rightarrow \{0, 1\}\}$ , dată de  $\varphi(A') = \xi_{A'}$ ,  $\forall A' \in \mathcal{P}(A)$ . Atunci  $\varphi$  este o bijecție. Urmează  $\overline{\mathcal{P}(A)} = 2^a$ , q.e.d.

**Corolarul 3.2.** Pentru orice număr cardinal  $a$ :

$$a < 2^a < 2^{2^a} < \dots$$

În particular:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$$

**Teorema 3.5.**  $2^{\aleph_0} = c$ .

*Demonstrație.* Să notăm cu  $A$  mulțimea aplicațiilor  $\varphi$  cu domeniul  $\mathbb{N}$  și codomeniul  $\{0, 1\}$ . Numărul cardinal al lui  $A$  este  $2^{\aleph_0}$ . Cum mulțimea de numere reale  $[0, 1)$  are numărul cardinal  $c$ , vom arăta că  $A \sim [0, 1)$ . Considerăm aplicația  $f: A \rightarrow [0, 1)$  dată prin  $f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{3^n}$ . Este clar că această serie este convergentă și că  $f$  este injectivă. Urmează  $2^{\aleph_0} \leq c$ . Fie acum un număr  $x \in [0, 1)$ . El poate fi scris în mod unic în forma  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ , unde  $x_n$  este 0 sau 1 și  $x_n = 0$  pentru o infinitate de  $n \in \mathbb{N}$ . Definim aplicația  $g: [0, 1) \rightarrow A$ , prin  $g(x) = \varphi$ , cu  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  dată de  $\varphi(n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .  $g$  este injectivă, ceea ce implică  $c \leq 2^{\aleph_0}$ . Aplicând acum teorema lui Bernstein rezultă afirmația, q.e.d.

Alte câteva proprietăți ale numerelor cardinale și ale operațiilor cu ele (unele implicând axioma alegerii) le enunțăm fără demonstrații.

Fie  $A$  o mulțime infinită și  $a = \overline{A}$ . Atunci:

- 1)  $n + a = a$  (În particular  $n + \aleph_0 = \aleph_0, n + c = c$ );
- 2)  $a + a = a$  (În particular  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, c + c = c$ );
- 3)  $b \leq a \Rightarrow a + b = a$  (În particular  $\aleph_0 + c = c$ );
- 4)  $a^2 = a \cdot a = a$  (În particular  $\aleph_0^2 = \aleph_0, c^2 = c$ );
- 5)  $b \leq a \Rightarrow ab = a$  (În particular  $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0, nc = c, \aleph_0 \cdot c = c$ ).

Cantor a lansat ipoteza alefilor: între  $a$  și  $2^a$  nu există alte numere cardinale; cazul particular  $a = \aleph_0$  constituie celebra ipoteză a continuului. I. P. Cohen a reușit să demonstreze în 1963, [19] că această ipoteză a continuului este o propoziție independentă de axiomele Zermelo-Fraenkel (inclusiv axioma alegerii) ce se pun la baza teoriei riguroase a mulțimilor. Pentru această realizare deosebită, în anul 1966, la Moscova, lui I. P. Cohen i s-a decernat premiul Field (echivalentul în matematică a premiului Nobel).

#### § 4. NUMERE ORDINALE

**Definiția 4.1.** Fie  $(A, \leq)$  o mulțime total ordonată. Vom spune că  $(A, \leq)$  este bine ordonată dacă pentru orice submulțime nevidă  $B$  din  $A$  există un element  $b \in B$  cu proprietatea  $b \leq x, \forall x \in B$ .

Elementul  $b \in B$  cu proprietatea  $b \leq x, \forall x \in B$  este numit cel mai mic element sau prim element din  $B$ . Orice mulțime  $(A, \leq)$ , bine ordonată, are un prim element și acesta este unic.

Orice mulțime finită total ordonată este, evident, bine ordonată. Mulțimea  $\mathbb{N}$  cu ordonarea uzuală este bine ordonată; mulțimile  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{R}$  sînt total ordonate dar nu și bine ordonate.

Fie  $(A, \leq)$  o mulțime total ordonată și  $a \in A$ . Submulțimea  $A_a = \{x \in A : x < a\}$  se numește segment din  $A$  determinat de elementul  $a$ . Cum se vede  $a \notin A_a$ .

Pentru mulțimile bine ordonate următoarea teoremă este deosebit de importantă în aplicații:

**Teorema 4.1.** (Principiul inducției transfinite). Fie  $(A, \leq)$  o mulțime bine ordonată. Dacă  $A'$  este o submulțime din  $A$  avînd proprietățile:

- 1°  $A'$  conține primul element din  $A$ ;



2° Pentru orice segment  $A_a \subset A'$ , avem  $a \in A'$ , atunci mulțimea  $A'$  coincide cu mulțimea  $A$ .

**Demonstrație.** Să presupunem prin absurd că submulțimea  $A'$  din  $A$  are proprietățile 1° și 2° din enunțul teoremei dar că  $A' \neq A$ . Atunci  $A \setminus A'$  este submulțime nevidă a mulțimii bine ordonate  $A$ . Ea are un prim element  $b$  care nu se găsește în  $A'$ . Segmentul  $A_b$  este inclus în  $A'$ . După 2° rezultă  $b \in A'$ . Absurd, q.e.d.

Reciproc, avem :

**Teorema 4.2.** Fie  $(A, \leq)$  o mulțime total ordonată cu prim element. Dacă singura submulțime  $A'$  a lui  $A$  ce satisface condițiile 1° și 2° din teorema 4.1 este  $A$ , atunci  $(A, \leq)$  este bine ordonată.

**Demonstrație.** Presupunem că  $B \neq \emptyset$  este o submulțime din  $A$  care nu are prim element. Atunci  $A' = A \setminus B$  este o submulțime a lui  $A$  care conține primul element din  $A$ . Dacă  $A_a$  este un segment din  $A'$ , atunci  $a \in A'$ . În caz contrar  $a$  ar fi primul element din  $B$ . Aplicând principiul inducției transfinite rezultă  $A' = A$ . Adică  $A \setminus B = A$ , deci  $B = \emptyset$ , în contradicție cu  $B \neq \emptyset$ , q.e.d.

Ultimele două teoreme arată că principiul inducției transfinite este echivalent cu buna ordonare. Vom spune că teoremele care sînt demonstrate cu ajutorul acestui principiu sînt demonstrate „prin recurență”.

**Definiția 4.2.** Două mulțimi total ordonate  $(A, \rho)$  și  $(B, \sigma)$  se numesc asemenea, și se scrie  $A \approx B$ , dacă există o bijecție  $f: A \rightarrow B$  cu proprietatea  $\forall x, y \in A, x \rho y \Rightarrow f(x) \sigma f(y)$ .

Considerăm acum un „univers”  $\mathcal{U}$  de mulțimi total ordonate. În cadrul acestui univers,  $\approx$  constituie evident o echivalență. Clasa de echivalență în raport cu  $\approx$  a unei mulțimi total ordonate  $(A, \leq)$  se notează prin  $\text{ord } A$  și se numește *tipul de ordine* al lui  $(A, \leq)$ . Dacă  $(A, \leq)$  este bine ordonată, aceeași proprietate o va avea orice alt element  $(B, \leq)$  din  $\text{ord } A$  și se spune că  $\text{ord } A$  constituie *numărul ordinal* al lui  $(A, \leq)$ .

Putem accepta că mulțimea vidă este bine ordonată; în locul notației  $\text{ord } \emptyset$  se preferă notația 0. Dacă  $n$  este un număr natural, mulțimea  $\{x: x \in \mathbb{N} \text{ și } x < n\}$ , în raport cu ordinea uzuală, este bine ordonată și nu apare nici o confuzie dacă notăm tot prin  $n$  numărul său ordinal. Dacă  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  cu ordonările uzuale sînt elemente ale universului  $\mathcal{U}$  putem renota  $\text{ord } \mathbb{N} = \omega$ ,  $\text{ord } \mathbb{Q} = \eta$ ,  $\text{ord } \mathbb{R} = \lambda$ ;  $\omega$  este număr ordinal dar  $\eta$  și  $\lambda$  sînt doar tipuri de ordine.

Pe mulțimea  $\mathcal{U}/\approx$  a tipurilor de ordine, în particular pe mulțimea  $\mathcal{Z}$  a numerelor ordinale, se pot defini în mod natural operațiile de adunare și de înmulțire. Aritmetica tipurilor de ordine este destul de complicată datorită faptului că operațiile de adunare și de înmulțire nu sînt comutative.

Vom defini pe  $\mathcal{Z}$  o relație de ordine parțială,  $\leq$ , în modul următor. Fie  $(A, \rho)$  și  $(B, \sigma)$  două mulțimi bine ordonate și  $\alpha = \text{ord } A$ ,  $\beta = \text{ord } B$ . Vom pune  $\alpha < \beta$  dacă există  $x \in B$  cu proprietatea  $A \approx B_x$ . Notăm  $\alpha \leq \beta$ , dacă  $\alpha < \beta$  sau  $\alpha = \beta$ . Se verifică ușor că  $\alpha \leq \beta$  depinde numai de numerele ordinale  $\alpha$  și  $\beta$  și nu depinde de reprezentanții  $(A, \rho)$ ,  $(B, \sigma)$ .

Cîteva proprietăți utile în aplicații sînt date de următoarele două teoreme :

**Teorema 4.3.** Dacă  $(A, \leq)$  este o mulțime bine ordonată și  $f: A \rightarrow A$  este o asemănare, atunci  $x \leq f(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

**Demonstrație.** Presupunînd, prin reducere la absurd, că există  $x_0 \in A$  cu proprietatea  $f(x_0) < x_0$ , fie  $a$  cel mai mic element  $x_0$  cu această proprietate. Avem  $f(a) < a$ . Aplicînd asemănarea  $f$ , avem  $(f(a)) < f(a)$ . Deci  $f(a) = b$  are proprietatea  $f(b) < b$ . Și cum  $f(a) < a$ , adică  $b < a$ , urmează că  $a$  nu este cel mai mic element cu această proprietate, ceea ce contrazice proprietatea de minimalitate a lui  $a$ , q.e.d.

**Teorema 4.4.** Dacă  $(A, \leq)$  și  $(B, \leq)$  sînt două mulțimi bine ordonate, atunci :

- 1°  $A$  nu este asemenea cu nici un segment  $A_a$  al său ;
- 2°  $A_x \approx A_y \Rightarrow x = y$  ;
- 3°  $A \approx B$  implică existența unei singure asemănări  $f: A \rightarrow B$ .

**Demonstrație.** 1° Admitem prin absurd că  $f: A \rightarrow A_x$  realizează o asemănare pentru un  $x \in A$ . După teorema 4.3,  $x \leq f(x)$ . Dar  $f(x) \in A_x$ . Deci  $f(x) < x$ . Aceste ultime relații sînt contradictorii.

2° Din  $A_x \approx A_y$ ,  $x \neq y$  putem avea  $x < y$ , atunci  $A_y$  este asemenea cu un segment  $A_x$  al său, în contradicție cu 1°.

3° Fie  $f, g: A \rightarrow B$  două asemănări. Rezultă  $f^{-1} \circ g: A \rightarrow A$  este o asemănare. După teorema (4.3),  $\forall x \in A, x \leq f^{-1} \circ g(x)$ . Atunci  $f(x) \leq g(x)$ . Schimbînd rolul lui  $f$  cu  $g$  avem și  $g(x) \leq f(x)$ . Deci, pentru orice  $x$  din  $A$ ,  $f(x) = g(x)$ , q.e.d.



Admițind axioma alegerii putem stabili proprietatea de trihotomie a mulțimii  $(\mathcal{L}, \leq)$ .

**Axioma alegerii.** Pentru orice familie  $\mathcal{F}$  nevidă, de mulțimi nevide, disjuncte două câte două, există o mulțime  $A$  care are în comun cu fiecare mulțime din  $\mathcal{F}$  un element și numai unul.

Fie  $(M, \mu)$  o mulțime parțial ordonată. Un element  $m \in M$  se numește maximal dacă  $m \mu x$  implică  $m = x$ . Un element  $n \in M$  se numește minimal dacă  $x \mu n$  implică  $x = n$ . Un lanț în  $(M, \mu)$  este o submulțime  $A \subset M$  împreună cu ordinea indusă  $\alpha$ , astfel încât  $(A, \alpha)$  este total ordonată.

Alte câteva chestiuni auxiliare. O familie  $\mathcal{F}$  de mulțimi se numește de caracter finit dacă pentru fiecare mulțime  $A$  avem  $A \in \mathcal{F}$  dacă și numai dacă, orice parte finită din  $A$  aparține lui  $\mathcal{F}$ . Aceste noțiuni pot fi aplicate familiilor de mulțimi pe care s-a ales drept relație de ordine parțială relația de incluziune.

Se dovedește că axioma alegerii este echivalentă cu fiecare dintre următoarele propoziții:

**Lema lui Tukey.** Orice familie nevidă de caracter finit are un element maximal.

**Principiul de maximalitate al lui Hausdorff.** Orice mulțime nevidă parțial ordonată conține un lanț maximal.

**Lema lui Zorn.** Orice mulțime nevidă parțial ordonată, în care fiecare lanț este mărginit superior, are un element maximal.

**Teorema bunei ordonări (Zermelo).** Orice mulțime poate fi bine ordonată.

Atragem însă atenția că această teoremă precizează doar existența unei bune ordonări pe o mulțime arbitrară  $A$  fără a indica un procedeu efectiv de construcție a unei astfel de relații; teorema nu afirmă nici unicitatea unei bune ordonări pe  $A$  și o astfel de afirmație nici nu este corectă. Fiind precizat un număr cardinal  $a$  putem pune în evidență un reprezentant al său  $A$  (deci  $\bar{A} = a$ ); în continuare se pot imagina bune ordonări diferite pe  $A$  ce pot conduce la diverse numere ordinale ce ar beneficia de notația  $\text{ord } A$ . Reținem deci că notația  $\text{ord } A$  este ambiguă deoarece nu se referă și la o anume bună ordonare pe  $A$  dar această ambiguitate nu creează confuzii.

**Teorema produsului cartezian.** Produsul cartezian al unei familii de mulțimi nevide este nevid.

În baza axiomei alegerii, putem demonstra și:

**Teorema 4.5.** Pentru orice pereche de numere ordinale  $\alpha$  și  $\beta$  are loc una și numai una dintre relațiile  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha = \beta$ ,  $\beta < \alpha$ .

**Demonstrație.** Teorema 4.4. afirmă că cel mult una dintre aceste relații are loc. Să arătăm că sigur cel puțin una dintre ele este verificată. Dacă  $\alpha = \text{ord } A$ ,  $\beta = \text{ord } B$ ,  $(A, \rho)$  și  $(B, \sigma)$  fiind bine ordonate, fie  $\mathcal{F}$  familia tuturor asemănarilor de la segmentele lui  $A$  sau  $A$  la segmentele lui  $B$  sau  $B$ . Avem  $\{(a, b)\} \in \mathcal{F}$ ,  $a$  fiind primul element din  $A$  și  $b$  primul element din  $B$ . Deci  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . După principiul de maximalitate al lui Hausdorff există un lanț maximal  $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ . Fie  $h = \cup \mathcal{L}$ . Se probează ușor că  $h$  aparține lui  $\mathcal{F}$ . Dacă  $\text{dom } h$  și  $\text{codom } h$  sînt segmentele  $A_x$  și  $B_y$  ale lui  $A$  și  $B$ , respectiv, atunci  $h \cup \{(x, y)\}$  poate fi adăugată lui  $\mathcal{L}$  și aceasta contrazice maximalitatea lui  $\mathcal{L}$ . Situația  $\text{dom } h \neq A$  și  $\text{codom } h \neq B$  este exclusă. Din  $\text{dom } h = A$  și  $\text{codom } h = B$  urmează  $\alpha = \beta$ ; din  $\text{dom } h = A$  și  $\text{codom } h = B_y$  rezultă  $\alpha < \beta$ ; ultima eventualitate  $\text{dom } h = A_x$  și  $\text{codom } h = B$  conduce la  $\beta < \alpha$ , q.e.d.

Deducem:

**Teorema 4.6.** Mulțimea  $(\mathcal{L}, \leq)$  este total ordonată; pentru orice  $a$  din  $\mathcal{L}$ ,  $\text{ord } \mathcal{L}_a = a$ .

**Demonstrație.** Fie  $a = \text{ord } A$ . Vom construi o aplicație  $f: \mathcal{L}_a \rightarrow A$  ce se va dovedi asemănătoare în raport cu ordonările bune subînțelese. Pentru  $x$  din  $\mathcal{L}_a$  are loc  $x < a$ ; prin teorema 4.4 există unic  $y$  în  $A$  încît  $\mathcal{L}_x = A_y$ ; definim  $y = f(x)$ .

**Teorema 4.7.** Pentru orice cardinal  $a$  există cel puțin un număr ordinal  $\alpha$  încît  $a = \bar{\mathcal{L}}_\alpha$ .

**Demonstrație.** Fie  $\bar{A} = a$ ; pe baza axiomei alegerii există o bună ordonare  $\rho$  pe  $A$ . Notăm  $\alpha = \text{ord } A$  și prin teorema precedentă deducem că  $(A, \rho)$  este asemenea cu  $(\mathcal{L}_\alpha, \leq)$ . Deducem  $A = \mathcal{L}_\alpha$  și prin urmare  $a = \bar{\mathcal{L}}_\alpha$ , q.e.d.

Atragem însă din nou atenția că în general  $\alpha$  nu este unic.

**Observație.** Să admitem că universul  $\mathcal{U}$  este suficient de amplu pentru a conține măcar o mulțime numărabilă și măcar una nenumărabilă (și, desigur, toate segmentele acestor mulțimi). Pe baza bunei ordonări a lui  $\mathcal{L}$  vor exista cele mai mici numere ordinale  $\omega$ ,  $\Omega$  încît  $\mathcal{L}_\omega$  să fie numărabilă, respectiv  $\mathcal{L}_\Omega$  să fie nenumărabilă.

Ipoteza continuului se exprimă acum prin  $\bar{\mathcal{L}}_\Omega = c$  și este echivalentă cu propoziția: pentru  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  este finită, numărabilă sau echipotentă cu  $\mathbb{R}$ .



Următoarea teoremă ilustrează rolul numerelor ordinale pentru studiul numerelor cardinale.

**Teorema 4.8.** *Fie un univers  $U$  și familia  $U/\sim$  a cardinalilor săi. Ordonarea  $\leq$  este totală și bună.*

**Demonstrație.** Precizînd bune ordonări  $\leq_A$  (conform teoremei lui Zermelo) pentru fiecare element  $A$  din  $U$ , obținem un univers  $U' = \{(A, \leq_A) : A \in U\}$  de mulțimi bine ordonate. Fie  $\mathcal{Z}$  mulțimea ordinalilor lui  $U'$ . Acum, pentru un număr cardinal  $a$ , există, conform teoremei precedente, un ordinal  $\alpha$  încît  $a = \overline{\mathcal{Z}_\alpha}$ . Dacă unui alt cardinal  $b$  îi corespunde ordinalul  $\beta$  are loc evident  $a \leq b \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ . Conform teoremelor 4.6 și 4.7 ( $U/\sim, \leq$ ) este total și bine ordonată.

Matematica contemporană utilizează două metode pentru edificarea ei: metoda constructivă și metoda axiomatică. Prima metodă, cea constructivă, constă în definirea noțiunilor ce intervin în teoriile matematice pe o cale directă, efectivă, așa cum s-a procedat în capitolul precedent cu teoria mulțimilor. Vom aplica această idee pentru construcția mulțimii numerelor naturale, urmînd ca metoda axiomatică să fie utilizată în celelalte capitole.

### § 1. MULȚIMEA $N$ A NUMERELOR NATURALE

Problemele discutate în capitolul precedent, privitoare la numerele cardinale își găsesc o primă aplicare în definirea mulțimii  $N$  a numerelor naturale. Ideea de bază, în construcția acestei mulțimi, a fost sugerată de Frege și Russell, din acest motiv se spune că avem a face cu *teoria Frege-Russell a numerelor naturale*.

Utilizînd mulțimea vidă  $\emptyset$ , a cărei unicitate a fost deja remarcată, mă considerăm șirul :

$$(1.1) \quad \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots,$$

în care fiecare termen, începînd cu al doilea, este mulțimea ale cărei elemente sînt toți termenii precedenți din șir.

**Definiția 1.1.** Se numesc numere naturale, numerele cardinale ale mulțimilor din șirul (1.1).

Notăm numerele naturale, respectiv, cu

$$0, 1, 2, \dots$$

iar mulțimea lor cu  $N$ .

Din modul de construcție a șirului (1.1) rezultă

$$n = \overline{\{0, 1, \dots, n-1\}}$$



Reamintim că mulțimile de cardinal  $n$  sînt numite finite, cele de cardinal  $\aleph_0 = \bar{\mathbb{N}}$  sînt numite numărabile. În baza definiției relației de ordine între numerele cardinale urmează  $0 < n < \aleph_0$ . Deci: Mulțimea  $\mathbb{N}$  nu este finită și orice element  $n \in \mathbb{N}$  este mai mic decît  $\bar{\mathbb{N}}$ .

Este evident că relația de ordine pe  $\mathbb{N}$ , determinată de ordinea între numerele cardinale este echivalentă cu relația de ordine naturală dată de succesiunea din șirul (1.1). Deoarece ordonarea numerelor cardinale, conform teoremei 4.9 (cap. I), este bună urmează:

**Teorema 1.1.** *Mulțimea  $(\mathbb{N}, \leq)$  este bine ordonată.*

Particularizînd teorema 4.1 din capitolul precedent deducem:

**Teorema 1.2.** *Pentru mulțimea  $(\mathbb{N}, \leq)$  are loc principiul inducției transfinite. Anume: dacă  $M \subset \mathbb{N}$  are proprietățile*

1°  $0 \in M$ .

2° Pentru orice segment  $M_n \subset M$ , avem  $n \in M$ , atunci  $M = \mathbb{N}$ .

În această formă el va fi numit și *principiul inducției complete*.

Pentru mulțimea  $(\mathbb{N}, \leq)$  convine să dăm o altă formă acestui principiu. În acest scop să numim *succesive* două numere naturale  $n$  și  $n'$  care sînt numerele cardinale a doi termeni succesivi din șirul (1.1) se mai spune că  $n'$  este *succesorul* lui  $n$ . Din modul lor de construcție, rezultă că între  $n$  și  $n'$  nu există alte numere naturale. Apoi, dacă  $n$  este dat în  $\mathbb{N}$  succesorul său  $n'$  este unic determinat și aparține mulțimii  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 1.3.** *Principiul inducției complete este echivalent cu afirmația: „Dacă pentru o mulțime  $M \subset \mathbb{N}$  avem 1°  $0 \in M$  și 2°  $n \in M \Rightarrow n' \in M$ , atunci  $M = \mathbb{N}$ .”*

*Demonstrație.* Se constată ușor că o mulțime  $M$  cu proprietățile 1° și 2° are și proprietățile 1°, 2° deci teorema 1.2 implică teorema 1.3. Implicația reciprocă rezultă în baza observației că orice număr natural nenul are un predecesor și  $(1^\circ \text{ și } 2^\circ) \Rightarrow (1^\circ \text{ și } 2')$ .

Să observăm acum că avem:

**Teorema 1.4.** *Adunarea și înmulțirea numerelor cardinale induce operațiile de adunare și înmulțire în mulțimea  $\mathbb{N}$  a numerelor naturale.*

*Demonstrație.* Avem de arătat că suma a două numere naturale  $m$  și  $n$ , definită ca sumă a două numere cardinale  $m + n$ , ne dă un număr natural, oricare ar fi  $m$  și  $n$ . Aceeași proprietate trebuie dovedită pentru produs.

Cum adunarea numerelor cardinale este asociativă și  $m + 0 = 0 + m = m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , să mai observăm că avem

$$m + n' = m + (n + 1) = (m + n) + 1 = (m + n)'$$

Fixînd un număr natural oarecare  $m$ , fie  $M$  mulțimea acelor numere naturale  $n$  pentru care suma de numere cardinale  $m + n$  este număr natural. Din  $m + 0 = m$  rezultă  $0 \in M$ . Apoi, dacă  $n \in M$ , atunci  $m + n$  este în  $\mathbb{N}$  și  $m + n' = (m + n)'$  este în  $\mathbb{N}$ . Deci  $n' \in M$ . În consecință, aplicînd principiul inducției,  $M = \mathbb{N}$ . Cum  $m$  era oarecare rezultă  $m + n \in \mathbb{N}$  pentru orice  $m$  și  $n$  din  $\mathbb{N}$ .

În cazul produsului de numere cardinale să observăm că avem, evident,

$$m \cdot 0 = 0, m \cdot 1 = m, m \cdot n' = m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m.$$

Să fixăm un număr oarecare  $m$  și fie  $M$  mulțimea acelor numere naturale  $n$  pentru care  $m \cdot n$  este număr natural. Din  $m \cdot 0 = 0$  se deduce  $0 \in M$ , iar din  $m \cdot n \in M$ , avem  $m \cdot n' = m \cdot n + m \in M$ . Urmează că  $n \in M$  implică  $n' \in M$ . Aplicînd principiul inducției rezultă  $M = \mathbb{N}$ . Și cum  $m$  era arbitrar, putem afirma că  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ , q.e.d.

Cel mai important rezultat privind mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$  este dat de:

**Teorema 1.5.** *Mulțimea  $\mathbb{N}$  a numerelor naturale împreună cu operațiile de adunare și înmulțire, date de teorema 1.4, este un semidomeniu de integritate.*

*Demonstrație.* Avem de arătat că pentru orice  $m, n, p \in \mathbb{N}$ :

$$m + (n + p) = (m + n) + p; m + 0 = m; m + n = n + m;$$

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p; m \cdot 1 = m; m \cdot n = n \cdot m;$$

$$(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p \text{ și } m \cdot n = 0 \Rightarrow (m = 0 \text{ sau } n = 0).$$

Cu excepția ultimei proprietăți, celelalte au fost dovedite fie în operațiile cu numere cardinale, fie în teorema 1.4. Pentru a justifica proprietatea  $m \cdot n = 0 \Rightarrow (m = 0 \text{ sau } n = 0)$  să observăm că produsul cartezian a două mulțimi este vid atunci și numai atunci cînd cel puțin una dintre mulțimi este mulțimea vidă. Aplicînd această observație produsului cartezian a doi termeni din șirul (1), rezultă imediat afirmația, q.e.d.

Ne propunem să arătăm în continuare că operațiile de adunare și de înmulțire în  $\mathbb{N}$  sînt compatibile cu structura de bună ordonare a lui  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 1.6.** *Are loc  $m \leq n$  dacă și numai dacă există un număr natural  $p$  încît  $m + p = n$ .*



**Demonstrație.** Fie  $m = \overline{M} \leq n = \overline{N}$ . Inegalitatea cardinalilor revine la existența unei bijecții  $f: M \rightarrow M' \subset N$ . Vom pune în evidență mulțimea  $P = N \setminus M'$  și cardinalul ei  $p$ . Din  $P \subset N$  urmează că  $p$  este număr natural iar definiția adunării numerelor cardinale asigură  $m + p = n$ .

Să presupunem acum că are loc  $m + p = n$ . Vom arăta prin inducție completă în raport cu  $p$  că o astfel de egalitate implică  $m \leq n$ . Pentru  $p = 0$  deducem  $n = m + 0 = n$ , deci  $m \leq n$ . Dacă din  $m + k = n$  urmează  $m \leq n$ , egalitatea  $m + k' = r$  devine  $(m + k)' = r$ , deci  $n' = r$ , adică  $n \leq r$ . Din  $m \leq n$  și  $n \leq r$  urmează  $m \leq r$  etc.

**Observație.** Numărul întreg  $p$ , ce există conform teoremei în ipoteza  $m \leq n$ , este unic, se notează  $n - m$  și se numește *diferența numerelor naturale*  $n$  și  $m$ .

**Teorema 1.7. Avem :**

- 1°  $m \leq n \Leftrightarrow m + p \leq n + p, \forall p \in \mathbb{N}$ .
- 2°  $m \leq n \Leftrightarrow mp \leq np, \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .
- 3°  $m \leq mn, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

**Demonstrație.** Din  $m \leq n$  și teorema 1.6 rezultă  $n = m + q, q \in \mathbb{N}$ . Atunci  $n + p = (m + p) + q$ . Aplicând din nou teorema 1.6 rezultă  $m + p \leq n + p$ . Reciproc,  $m + p \leq n + p \Rightarrow n + p = (m + r) + p, r \in \mathbb{N}$ , care, prin inducție, implică  $n = m + r, r \in \mathbb{N}$ . Din nou aplicând teorema 1.6 avem  $m \leq n$ . În mod analog se dovedește 2°.

3°. Dacă  $n \neq 0$  există  $p$  încît  $n = p'$ . Urmează  $mn = mn' = mp + m$  și deci  $m \leq mn$ .

**Observație.** Are loc  $m = mn$  dacă și numai dacă  $m = 0$  sau  $n = 1$ .

**Teorema 1.8. (Axioma lui Arhimede).** Oricare ar fi numerele naturale  $m$  și  $p$ , cu  $m \neq 0$ , există un număr natural  $n$  așa ca  $n \cdot m > p$ .

**Demonstrație.** Aplicăm inducția după  $p$ . Observăm că pentru  $p = 0$  proprietatea este verificată cu  $n = 1$ . Dacă acum  $m \neq 0$  este oarecare, fixat, și  $p \neq 0$  și există  $n \in \mathbb{N}$  așa ca  $nm > p$ , atunci  $n'm > p'$ , q.e.d.

**Teorema 1.9. (Algoritmul împărțirii cu rest în  $\mathbb{N}$ ).** Dacă  $m, n$  sînt numere naturale cu  $m \neq 0$  există numere naturale unice  $q$  (numit cit) și  $r$  (numit rest) încît  $n = mq + r$  și  $r < m$ .

**Demonstrație.** Fie  $A = \{x: x \in \mathbb{N} \text{ și } mx \leq n\}$ ; prin teorema precedentă  $A$  este submulțime proprie a lui  $\mathbb{N}$ . Are loc  $0 \in A$  și pentru a nu ajunge prin inducție la concluzia falsă  $A = \mathbb{N}$  trebuie să existe  $q \in A$  încît  $q' \notin A$ . Din  $q \in A$  rezultă existența unui  $r$  încît  $mq +$

$r = n$ . Deoarece  $q' \notin A$  rezultă  $m(q + 1) > mq + r$  deci  $r < m$ . Pentru a dovedi unicitatea lui  $(q, r)$  vom presupune că există și  $(h, k) \neq (q, r)$  încît  $n = mh + k$  și  $k < m$ . Urmează  $h \in A, h' \notin A$ . Dacă, de exemplu,  $h < q$  urmează  $h' \leq q$  și deci  $mh' \leq mq \leq n$  în contradicție cu  $h' \notin A$ . Analog, din  $q < h$  am contrazice  $q' \notin A$ . Deci  $h = q$ . Urmează  $n = mq + r = mq + k$  deci  $r = k$ , q.e.d.

**Observații.** Noțiunea de număr natural este în mod evident obiectivă și necontradictorie. Aici însă nu se pune problema abstragerii acestei noțiuni din realitatea obiectivă ci de a o construi în cadrul matematicii. Faptul că în cadrul matematicii nu putem dovedi caracterul obiectiv al numărului natural constituie un aspect secundar, edificator. În acest sens convingerea lui Frege este fermă :

„În cadrul aritmeticii, noi nu avem de-a face cu obiecte pe care le cunoaștem ca pe ceva străin, exterior, prin intermediul simțurilor, ci cu obiecte date în mod nemijlocit rațiunii, care le poate intui deplin pe acestea ca pe ceva propriu, al ei. În pofida faptului de mai sus, ori, mai bine zis, tocmai datorită lui, aceste obiecte nu sînt fantasmе subiective. Nu există nimic mai obiectiv decît legile aritmeticii” (vezi [33]).

## §2. MULȚIMEA $\mathbb{Z}$ A NUMERELOR ÎNTREGI

Plecînd de la mulțimea  $\mathbb{N}$  a numerelor naturale vom construi mulțimea  $\mathbb{Z}$  a numerelor întregi, în ideea de a completa semigrupul aditiv  $(\mathbb{N}, +)$  astfel încît să obținem un grup pe noua mulțime de numere.

Fie  $\mathcal{I} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Vom defini o relație binară  $\sim$  pe  $\mathcal{I}$  prin :

$$(m, n) \sim (m_1, n_1) \Leftrightarrow m + n_1 = m_1 + n$$

**Propoziția 2.1. Relația  $\sim$  este o echivalență pe mulțimea  $\mathcal{I}$ .**

În adevăr,  $(m, n) \sim (m, n)$  are loc pentru că  $m + n = n + m$ . Din  $(m, n) \sim (m_1, n_1) \Rightarrow (m_1, n_1) \sim (m, n)$ , deoarece  $m + n_1 = m_1 + n \Rightarrow m_1 + n = m + n_1$ . De asemenea avem  $[(m, n) \sim (m_1, n_1) \text{ și } (m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)] \Rightarrow (m, n) \sim (m_2, n_2)$ , q.e.d.

**Propoziția 2.2. Au loc proprietățile :**

- 1°  $(m, m) \sim (0, 0), \forall m \in \mathbb{N}$ ;
- 2°  $(m, n) \sim (m - n, 0)$ , pentru  $m > n$ ;
- 3°  $(m, n) \sim (0, n - m)$ , pentru  $n > m$ .



Demonstrațiile acestor proprietăți sînt imediate.

Fie  $\mathbf{Z} = \mathcal{I}/\sim$ ; un element al acestei mulțimi se numește un număr întreg, iar  $\mathbf{Z}$  se numește mulțimea numerelor întregi. Cum  $\mathbf{Z}$  este mulțimea claselor de echivalență în raport cu  $\sim$ , vom nota cu  $[m, n]$  numărul întreg determinat de  $(m, n)$ .

**Propoziția 2.3.** Dacă  $(m, n) \sim (m_1, n_1)$ ,  $(p, q) \sim (p_1, q_1)$ , atunci

$$1^\circ (m + p, n + q) \sim (m_1 + p_1, n_1 + q_1) \text{ și}$$

$$2^\circ (mp + nq, mq + np) \sim (m_1p_1 + n_1q_1, m_1q_1 + n_1p_1).$$

*Demonstrație.*  $1^\circ$  Din  $m + n_1 = m_1 + n$ ,  $p + q_1 = p_1 + q$  rezultă imediat  $m + p + n_1 + q_1 = m_1 + p_1 + n + q$ . Analog se verifică  $2^\circ$ .

**Propoziția 2.4.** Aplicațiile  $+: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$  și  $\cdot: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}$ , definite prin

$$[m, n] + [p, q] = [m + p, n + q] \text{ și respectiv}$$

$$[m, n] \cdot [p, q] = [mp + nq, mq + np],$$

nu depind de reprezentanții  $(m, n)$  și  $(p, q)$  ai numerelor întregi  $[m, n]$ , respectiv  $[p, q]$ .

În adevăr, egalitățile precedente sînt consecințe imediate ale propoziției 2.3.

Așadar  $+$  și  $\cdot$  sînt operații binare pe mulțimea  $\mathbf{Z}$ ; le vom numi adunarea și înmulțirea numerelor întregi.

**Teorema 2.1.** Mulțimea  $\mathbf{Z}$  a numerelor întregi, împreună cu operațiile de adunare și înmulțire, este un domeniu de integritate.

*Demonstrație.*  $1)$   $(\mathbf{Z}, +)$  este grup abelian.

Într-adevăr,  $[m, n] + ([p, q] + [r, s]) = [m, n] + [p + r, q + s] = [m + p + r, n + q + s] = ([m, n] + [p, q]) + [r, s]$ . Element neutru este  $[0, 0]: [m, n] + [0, 0] = [m, n]$ . Opusul  $-[m, n]$  al numărului  $[m, n]$  este  $[n, m]$  întrucît  $[m, n] + [n, m] = [m + n, m + n] = [0, 0]$ . În fine,  $[m, n] + [p, q] = [m + p, n + q] = [p, q] + [m, n]$ .

$2)$   $(\mathbf{Z}, \cdot)$  este semigrup cu unitate, comutativ.

$[m, n] \cdot [p, q] \cdot [r, s] = [mp + nq, mq + np] \cdot [r, s] = [mpr + nqr + mqs + nps, mps + nqs + mqr + npr] = [m, n] \cdot ([p, q] \cdot [r, s])$ .  $[1, 0]$  este unitate:  $[m, n] \cdot [1, 0] = [m, n]$ . În fine,  $[m, n] \cdot [p, q] = [mp + nq, mq + np] = [p, q] \cdot [m, n]$ .

$3)$  Înmulțirea este distributivă față de adunare:  $[m, n] \cdot ([p, q] + [r, s]) = [m, n] \cdot [p + r, q + s] = [mp + mr + nq + ns, mq + ms + np + nr] = [m, n] \cdot [p, q] + [m, n] \cdot [r, s]$ .

$4)$  Absența divizorilor lui zero. Fie  $[m, n] \cdot [p, q] = [0, 0]$ ; dacă  $[m, n] \neq [0, 0]$  are loc  $m \neq n$ . Fixăm ideile presupunînd de exemplu  $m > n$ , deci există  $r \neq 0$  încît  $m = n + r$  și deci  $[m, n] = [r, 0]$ . Egalitatea inițială devine  $[r, 0] \cdot [p, q] = [0, 0]$ , adică  $rp = r q$ . Urmează  $p = q$ , adică  $[p, q] = [0, 0]$ , q.e.d.

Vom renota elementul  $[0, 0]$  din  $\mathbf{Z}$  prin  $0$ ; vom constata ulterior că această „identificare” nu generează confuzii. Fie  $\mathbf{Z}_+ = \{[m, n]: m > n\}$  și  $\mathbf{Z}_- = \{[m, n]: m < n\}$ .

**Propoziția 2.5.**  $1)$   $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}_+$ .

$2)$   $\forall [m, n] \in \mathbf{Z} \Rightarrow [m, n]$  aparține uneia și numai uneia dintre mulțimile  $\mathbf{Z}_-, \{0\}, \mathbf{Z}_+$ .

În adevăr,  $1)$  este evidentă în baza definițiilor mulțimilor  $\mathbf{Z}_-, \{0\}$  și  $\mathbf{Z}_+$ . Fie  $[m, n]$  un număr întreg oarecare și  $(m, n)$  un reprezentant al său. Dacă  $(m, n) \sim (m', n')$  și  $m > n$ , atunci  $m' > n'$ , deoarece  $m + n' = n + m'$  și  $m + n' > n + m' \Rightarrow n + m' > n + n' \Rightarrow m' > n'$ . Prin urmare proprietatea  $m > n$  nu depinde de reprezentanți, ci numai de numărul întreg  $[m, n]$ . Atunci, aplicînd trihotomia numerelor naturale, avem sau  $m > n$  și atunci  $[m, n] \in \mathbf{Z}_+$ , sau  $m = n$  și atunci  $[m, n] = 0$ , sau  $m < n$  și atunci  $[m, n] \in \mathbf{Z}_-$ , dar numai una dintre situații se poate prezenta, q.e.d.

Mulțimea  $\mathbf{Z}_+$  va fi numită mulțimea numerelor întregi pozitive și  $\mathbf{Z}_-$  mulțimea numerelor întregi negative.

**Propoziția 2.6.** Operația de adunare,  $+$ , din  $\mathbf{Z}$  induce pe  $\mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$  o operație notată tot  $+$ , iar operația de înmulțire pe  $\mathbf{Z}$  induce pe  $\mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$  o operație notată tot  $\cdot$ ; tripletul  $(\mathbf{Z}_+ \cup \{0\}, +, \cdot)$  este un semidomeniu de integritate.

În adevăr,  $\mathbf{Z}_+ \cup \{0\}$  este parte stabilă în raport cu  $+$  și cu  $\cdot$ . Atunci restricțiile operațiilor  $+$  și  $\cdot$  la această submulțime dau o structură de semidomeniu de integritate, așa cum se vede imediat.

**Definiția 2.1.** Vom spune că numărul întreg  $[m, n]$  este mai mic decît numărul întreg  $[p, q]$  dacă diferența  $[p, q] - [m, n] \in \mathbf{Z}_+$ . Vom nota această relație prin semnul  $<$  și vom pune  $[m, n] \leq [p, q]$  dacă  $[m, n] < [p, q]$  sau  $[m, n] = [p, q]$ .

**Teorema 2.2.** Mulțimea  $(\mathbf{Z}, \leq)$  este total ordonată.

*Demonstrație.* Avem, evident,  $[m, n] \leq [m, n]$ ;  $[m, n] \leq [p, q]$ ,  $[p, q] \leq [r, s] \Rightarrow [m, n] \leq [r, s]$ . Fie acum  $[m, n]$  și  $[p, q]$  două numere întregi. După propoziția 2.5, numărul întreg



$[p, q] - [m, n]$  aparține fie lui  $\mathbb{Z}_+$ , fie lui  $\{0\}$ , fie lui  $\mathbb{Z}_-$ , dar numai uneia dintre aceste mulțimi disjuncte; dacă acest număr aparține lui  $\mathbb{Z}_+$ , atunci  $[m, n] < [p, q]$ . Dacă el este zero, atunci  $[m, n] = [p, q]$ . În fine, dacă el este în  $\mathbb{Z}_-$ , atunci  $[p, q] < [m, n]$  și numai una dintre aceste situații are loc, q.e.d.

Mulțimea  $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$  este bine ordonată prin  $\leq$ . Atunci:

**Teorema 2.3.** 1° *Există o asemănare unică  $f$  a mulțimilor ordonate  $(\mathbb{N}, \leq)$  și  $(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, \leq)$ .*

2°  *$f$  este un izomorfism al semidomeniilor de integritate  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$  și  $(\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, +, \cdot)$ .*

**Demonstrație.** În primul rând să arătăm că  $[m, n] \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$  dacă și numai dacă există  $p \in \mathbb{N}$  încît  $[m, n] = [p, 0]$ . În adevăr,  $[m, n] \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \Rightarrow m \geq n \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}; m + p = n$ . Atunci  $(m, n) \sim (p, 0)$  are loc. Invers,  $[p, 0] \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$  și  $[m, n] = [p, 0]$  aparține acestei mulțimi.

Acum avem  $[m, 0] \leq [p, 0] \Leftrightarrow m \leq p$ .

Aplicația  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ ,  $f(m) = [m, 0]$  este o bijecție care are proprietatea  $m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$ . Deci  $f$  este o asemănare. După teorema 4.4, cap. I, această asemănare este unică.

2° Observăm:  $f(m + n) = [m + n, 0] = [m, 0] + [n, 0] = f(m) + f(n)$  și  $f(m \cdot n) = [mn, 0] = [m, 0] \cdot [n, 0] = f(m) \cdot f(n)$ , q.e.d.

Prin intermediul acestui izomorfism  $f$ , identificăm elementele din  $\mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$  cu numerele naturale cărora le corespund. După această identificare,  $\mathbb{N}$  apare ca o submulțime a lui  $\mathbb{Z}$ , deci concepem  $\mathbb{Z}$  ca o extensie a lui  $\mathbb{N}$ . Prin teorema ce urmează vom dovedi că această extensie este „minimală”.

**Teorema 2.4.** *Dacă  $V = (V, \oplus, \circ)$  este un inel,  $\mathbb{N} \subset V$  și restricțiile operațiilor  $\oplus$  și  $\circ$  la  $\mathbb{N}$  coincid cu operațiile de adunare și înmulțire ale numerelor naturale, atunci există un homomorfism injectiv  $h$  de la inelul  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  al întregilor la  $V$ .*

**Demonstrație.** Este imediată punînd  $h([m, n]) = m \oplus (-n)$ , unde  $-n$  este opusul lui  $n$  în  $V$ .

**Teorema 2.5.** *Inelul  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , ordonat prin  $\leq$ , este „arhimedian” adică, oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}_-$  și  $b \in \mathbb{Z}$ , există un număr natural  $n$  încît  $na > b$ .*

**Demonstrație.** Putem considera  $a = [m, 0]$  cu  $m \neq 0$ . Dacă  $b = [p, q]$  inegalitatea  $na > b$  revine la  $nm + q > p$ . Dacă  $p \leq q$  putem lua  $n = 0$ . În caz contrar, există  $h$  încît  $p = q + h$  și, deoarece  $\mathbb{N}$  este arhimedian, vom găsi  $n$  încît  $nm > h$ , q.e.d.

Se observă că, privind  $\mathbb{Z}$  drept extensie a lui  $\mathbb{N}$ , notăm elementele sale și prin litere mici din alfabetul latin.

### 3. DIVIZIBILITATEA ÎN INELUL ÎNTREGILOR

Considerăm cunoscută funcția valoare absolută  $| \cdot | : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , unde  $|x| = \max \{-x, x\}$  și principalele ei proprietăți.

**Teorema 3.1.** (Algoritmul împărțirii cu rest în  $\mathbb{Z}$ ). *Pentru orice numere întregi  $a, b$  cu  $b \neq 0$ , există numere întregi unice  $q$  (cîntul) și  $r$  (restul) încît  $a = bq + r$  și  $0 \leq r < |b|$ .*

**Demonstrație.** Conform teoremei 1.9 vor exista numere naturale  $h, k$  încît  $|a| = |b| \cdot h + k$  și  $k < |b|$ . Apar doar următoarele posibilități și, corespunzător lor, expresiile lui  $q$  și  $r$ :

$$a \geq 0, b > 0 \quad \Rightarrow q = h, \quad r = k;$$

$$a \geq 0, b < 0 \quad \Rightarrow q = -h, \quad r = k;$$

$$a < 0, b > 0, k = 0 \quad \Rightarrow q = -h, \quad r = 0;$$

$$a < 0, b > 0, k \neq 0 \quad \Rightarrow q = -(1 + h), r = b - k;$$

$$a < 0, b < 0, k = 0 \quad \Rightarrow q = h, \quad r = 0;$$

$$a < 0, b < 0, k \neq 0 \quad \Rightarrow q = h - 1, \quad r = b - k.$$

Se consideră relația binară  $|$  pe  $\mathbb{Z}$  definită prin

$$x|y \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, y = a \cdot x.$$

Simbolul  $x|y$  se citește „ $x$  divide  $y$ ”. Relația inversă,  $|^{-1}$ , beneficiază de notația  $x : y$  înseamnă  $y|x$  și se citește „ $x$  se divide prin  $y$ ” sau „ $y$  se împarte exact la  $y$ ”. Se utilizează și notația  $x \nmid y$  cu semnificația:  $x$  nu divide  $y$ .

**Propoziția 3.1.** *Relația binară  $|$  este o „preordine” pe  $\mathbb{Z}$ , adică este reflexivă și tranzitivă. Din  $x|y$  și  $y|x$  rezultă că  $x$  și  $y$  „sînt numere întregi asociate” adică  $x = y$  sau  $x = -y$ .*

Se constată că restricția la  $\mathbb{N}$  a relației  $|$  este o ordonare parțială în raport cu care 0 este element maximal. Ordonarea  $|$  a lui  $\mathbb{N}$  nu este totală deoarece, de exemplu,  $2 \nmid 3$  și  $3 \nmid 2$ .

**Teorema 3.2.** *Dacă  $x|y$ , atunci  $y = 0$  sau  $|x| \leq |y|$ .*

Într-adevăr, din  $x|y$  urmează  $y = a \cdot x$  și  $|y| = |a| \cdot |x|$ . Se utilizează apoi punctul 3° al teoremei 1.7.



**Teorema 3.3.** 1°  $x|y \Rightarrow x|(y \cdot z)$ ; 2°  $x|y$  și  $x|z \Rightarrow x|(y + z)$ ;  
Reținem și următoarele formule ușor de demonstrat

$$x \in \mathbf{Z} \text{ și } x \neq 0 \Rightarrow 1|x \text{ și } (-1)|x;$$

$$x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x|0;$$

$$x|y \Leftrightarrow (-x)|y \Leftrightarrow x|(-y) \Leftrightarrow (-x)|(-y).$$

Pentru orice element  $a$  din  $\mathbf{Z}$  se consideră mulțimea  $D_a = \{x : x|a\}$  ale cărei elemente se numesc *divizori* ai lui  $a$ . Pentru  $a=0$  obținem  $D_0 = \mathbf{Z}$ . Pentru orice  $a$  au loc:  $1 \in D_a$ ,  $-1 \in D_a$ ,  $a \in D_a$ ,  $-a \in D_a$ ; numerele  $1$ ,  $-1$ ,  $a$ ,  $-a$  se numesc *divizori improprii* ai lui  $a$ ; celelalte elemente din  $D_a$  se numesc *divizori proprii*.

**Definiția 3.1.** Numărul întreg  $a$  este *prim* dacă mulțimea  $D_a$  are cardinalul 4.

Condiția revine la  $a \notin \{-1, 0, 1\}$  și la faptul că  $a$  nu admite divizori proprii. Un număr întreg  $a$  ce satisface  $a \notin \{-1, 0, 1\}$  și nu este prim se numește *compus*.

**Teorema 3.4.** Orice număr compus admite cel puțin un divizor prim, număr natural.

**Demonstrație.** Dacă  $n$  este compus,  $D_n$  are cardinalul mai mare ca 4, deci  $D_n \setminus \{-1, +1, -n, +n\}$  este o mulțime nevidă  $D'_n$ . Mulțimea  $E = \{x : x \in D'_n\}$  admite un prim element  $p$  ce este evident număr natural diferit de 0 și constituie un divizor propriu al lui  $n$ . Am constatat deci că există și un întreg  $q$  încît  $n = p \cdot q$ . Evident  $p \notin \{-1, 0, 1\}$  și dacă, prin absurd, nu ar fi prim, ar fi compus și am putea relua pentru el etapa de mai sus pentru a găsi  $p = p_1 \cdot p_2$ ,  $p_1$  fiind un număr natural, divizor propriu al lui  $p$ . Ar urma că  $p_1$  este un divizor propriu al lui  $n$ , deci  $p_1 \in E$  și  $p_1 < p$ , contradicând calitatea de prim element a lui  $p$ .

**Observație.** Mai rezultă și  $p \leq |q|$ , deci  $p^2 \leq |pq| = |n|$  deci numărul compus  $n$  admite cel puțin un divizor prim  $p$  încît  $0 < p < \sqrt{|n|}$ .

**Teorema 3.5.** Dacă  $p$  este număr prim și  $p|(x \cdot y)$ , atunci  $p|x$  sau  $p|y$ .

**Demonstrație.** Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că  $p$  este număr natural. Dacă  $p \nmid x$  va exista un număr natural nenul  $x' < p$  încît  $x = p \cdot q + x'$ . Analog, dacă (prin absurd) nu are loc nici  $p|y$  găsim  $s$  în  $\mathbf{Z}$  și  $y'$  în  $\mathbf{N}^*$  încît  $y = p \cdot s + y'$  și  $y' < p$ . Urmează  $xy = p \cdot k + x'y'$ , unde  $k = pqs + qy' + sx'$ . Rezultă  $p|x'y'$  și se contrazice observația de mai sus.

**Teorema 3.6.** (a descompunerii în factori primi). Pentru orice număr întreg  $n \neq 0$  există o descompunere unică de forma

$$(3.1) \quad n = \varepsilon \cdot (p_1)^{a_1} \cdot (p_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (p_k)^{a_k},$$

unde  $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ ,  $p_i$  sînt numere naturale prime,  $p_1 < p_2 < \dots < p_k$  și  $a_i$  sînt numere naturale nenule.

Determinarea descompunerii (3.1) se realizează ușor cu teorema 3.4. Pentru unicitate se presupune prin absurd că în afară de (3.1) ar mai exista încă o descompunere

$$n = \varepsilon'(q_1)^{b_1} \cdot (q_2)^{b_2} \cdot \dots \cdot (q_k)^{b_k},$$

îndeplinind condițiile precizate. Urmează imediat  $\varepsilon = \varepsilon'$ . Deducem  $q_1|n$  și urmează  $q_1 = p_1$ ; simplificăm acest factor de  $a_1$  sau  $b_1$  ori și vom constata  $a_1 = b_1$  etc.

**Teorema 3.7.** Există o infinitate de numere prime.

**Demonstrația** se realizează presupunînd prin absurd că ar exista doar un număr finit de numere prime,  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Numărul  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$  nu poate fi prim, și nici nu are loc  $n \in \{-1, 0, 1\}$ . Dacă  $n$  ar fi compus, ar admite un factor prim pozitiv  $p$  pentru care nu poate avea loc  $p = p_i$  etc.

Fie  $m$  un număr natural nenul. Introducem o relație binară  $\equiv$  pe  $\mathbf{Z}$  definind

$$x \equiv y \Leftrightarrow m|(x - y).$$

Atunci cînd numărul  $m$  nu este indicat de context în loc de  $x \equiv y$  se scrie  $x \equiv y \pmod{m}$ ; relația binară  $\equiv$  se citește „congruent cu” iar specificarea mod  $m$  se citește „modulo”  $m$ .

**Teorema 3.8.** Congruența modulo  $m$  este o echivalență. Mulțimea factor  $Z_m$  se dotează cu operații  $+$  și  $\cdot$  încît  $(Z_m, +, \cdot)$  este înel și proiecția canonică  $\pi: \mathbf{Z} \rightarrow Z_m$  este  $k$ -omorfism de inele. Dacă  $m$  este număr prim  $(Z_m, +, \cdot)$  este corp.

**Demonstrația** este imediată. Se poate presupune că  $m$  este număr natural fără a restrînge generalitatea. Funcția  $\pi: \mathbf{Z} \rightarrow Z_m$  asociază unui număr întreg  $z$  restul împărțirii sale la  $m$ . Elementele lui  $Z_m$ , clasele factor, se notează cu  $\hat{0}, \hat{1}, \dots, \hat{m-1}$ , unde  $\hat{n}$  este clasa de



echivalență a lui  $n$ , adică

$$n = \{n + xm : x \in \mathbb{Z}\}.$$

Se poate remarca ușor că  $\hat{0}$  este un ideal al inelului  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ . Dacă  $m$  nu este prim,  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  nu este domeniu de integritate; de exemplu  $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$ . Pentru  $m$  prim, calitatea de domeniu de integritate a lui  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  rezultă din teorema 3.5. Avînd în vedere că  $\mathbb{Z}_m$  are un număr finit de elemente rezultă acum că este corp. Într-adevăr, pentru  $\hat{a} \in \mathbb{Z}_m \setminus \{\hat{0}\}$  funcția  $f_a : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$  dată prin  $f_a(\hat{x}) = (\hat{a}x)$  este, pentru  $m$  prim, injectivă și datorită finitudinii lui  $\mathbb{Z}_m$  și surjectivă. Va exista deci o soluție unică a ecuației  $\hat{a} \cdot \hat{x} = \hat{1}$  ce constituie inversul elementului  $\hat{a}$  etc.

**Teorema 3.9.** (Mica teoremă a lui Fermat). *Dacă  $m$  este prim și  $a$  nu este divizibil prin  $m$ , atunci*

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}.$$

*Demonstrație.* Vom constata că în șirul de numere  $a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (p-1)$  nu există două congruente modulo  $m$  și nici unul nu este congruent cu zero. Prin urmare

$$\{\hat{a}, \hat{2a}, \dots, \widehat{(m-1)a}\} = \{\hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{m-1}\}.$$

În consecință produsele elementelor celor două mulțimi coincid, adică

$$(m-1)! a^{m-1} \equiv (m-1)! \pmod{m},$$

sau

$$m \mid (m-1)!(a^{m-1} - 1).$$

Dar  $m \nmid (m-1)!$  pentru că  $m$  (prim) nu divide nici unul dintre numerele  $1, 2, \dots, m-1$  strict inferioare lui. Rezultă  $m \mid (a^{m-1} - 1)$ , q.e.d.

**Teorema 3.10.** (Lagrange). *Dacă  $m$  este prim iar*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

*este un polinom de grad  $n \geq 1$  cu coeficienți întregi încît  $m \nmid a_0$ , atunci în mulțimea  $N_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  există cel mult  $n$  numere  $x$  pentru care  $m \mid f(x)$ .*

*Demonstrația* se face prin inducție după gradul  $n$ .

Pentru  $n = 1$ , dacă ar exista în  $N_m$  elemente distincte  $x, y$  încît  $m \mid f(x)$  și  $m \mid f(y)$ , atunci  $m$  ar divide și diferența  $f(x) - f(y) = a_0(x - y)$ . Ar urma  $m \mid (x - y)$ , absurd.

Fie un număr natural arbitrar  $n$  încît concluzia teoremei să fie valabilă pentru orice polinoame  $g$  de grade cel mult egale cu  $(n-1)$  cu un coeficient dominant nedivizibil prin  $m$ . Presupunem prin absurd că, pentru polinomul  $f$  de grad  $n$  din enunțul teoremei, nu este adevărată concluzia și în  $N_m$  există  $n+1$  elemente distincte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  încît  $m \mid f(x_k)$  pentru  $0 \leq k \leq n$ . Se constată ușor că există un polinom  $g$  de grad  $n-1$  cu coeficienți întregi încît  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot g(x)$  și coeficientul dominant al lui  $g$  este  $a_0$ . Deducem că pentru  $1 \leq k \leq n$  are loc  $m \mid [f(x_k) - f(x_0)]$ , și deoarece  $m \nmid (x_k - x_0)$  urmează  $m \mid g(x_k)$ , în contradicție cu ipoteza inductivă.

Conchidem imediat asupra valabilității concluziei teoremei.

**Corolar.** *Dacă  $m$  este prim și  $f$  este un polinom de grad  $n$  cu coeficienți întregi încît există în  $N_m$  mai mult de  $n$  numere  $x$  încît  $m \mid f(x)$ , atunci toți coeficienții lui  $f$  se divid prin  $p$ .*

*Demonstrație.* Presupunem că  $f$  nu satisface concluziile corolarului și  $a_k$  este primul său coeficient ce nu se divide la  $m$ ; conform teoremei,  $k > 0$ . Presupunem inițial  $k < n$ . Fie  $g(x) = a_k x^{n-k} + \dots + a_n$ . Deoarece  $m \mid f(x)$  și  $m \mid g(x)$  au loc simultan, deducem că polinomul  $g$  de grad  $n-k$  nu satisface teorema lui Lagrange. Pentru a nu intra în contradicție se impune să aibă loc  $k = n$ . În acest caz însă  $f(x) = mx \cdot \tilde{g}(x) + a_n$  și deoarece există valori întregi  $x$  încît  $m \mid f(x)$  urmează  $m \mid a_n$ . Deci ipoteza că nu ar fi satisfăcută concluzia corolarului conduce la o contradicție.

**Teorema 3.11.** (Wilson). *Pentru orice număr natural prim  $m$  are loc  $m \mid [(m-1)! + 1]$ .*

*Demonstrație.* Considerăm polinomul

$$f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-m+1) - x^{m-1} + 1$$

de grad  $m-2$  și avînd evident coeficienți întregi. Pentru  $x = 1, 2, \dots, m-1$  are loc  $f(x) = -(x^{m-1} - 1)$  și, conform teoremei lui Fermat,  $m \mid f(x)$ . Conform corolarului de mai sus (considerat pentru  $n = m-2$ ) toți coeficienții lui  $f(x)$  sînt divizibili la  $m$ , în particular și termenul liber,  $f(0) = (-1)^{m-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) + 1$ . Dacă  $m$  este impar  $f(0) = (m-1)! + 1$ , deci concluzia va fi satisfăcută



pentru orice  $m$  prim cu eventuala excepție a lui 2. Pentru  $m = 2$  constatăm însă direct că  $(m-1)! + 1 = 1 + 1 = 2$ , număr divizibil prin 2, q.e.d.

#### § 4. MULȚIMEA $\mathbf{Q}$ A NUMERELOR RAȚIONALE

În  $\mathbf{Z}$  nu există în general inverse în raport cu înmulțirea; vom construi o extensie  $\mathbf{Q}$  a lui  $\mathbf{Z}$  care să fie corp.

Fie  $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$  și  $D = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ . Vom defini o relație binară  $\sim$  pe  $D$  cerind:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Deducem imediat

**Propoziția 4.1.**  $\sim$  este o echivalență pe  $D$ .

**Propoziția 4.2.** Au loc următoarele:

- 1°  $\forall a \in \mathbf{Z}, \forall b, c \in \mathbf{Z}^*, (a, b) \sim (ac, bc)$ ;
- 2°  $\forall a \in \mathbf{Z}, \forall b, c, d \in \mathbf{Z}^*, (a, b) \sim (ac, d) \Rightarrow d = bc$ ;
- 3°  $\forall a \in \mathbf{Z}^*, (a, a) \sim (1, 1)$  și  $(0, a) \sim (0, 1)$
- 4°  $[(a, b) \sim (c, d) \text{ și } a \neq 0] \Rightarrow [c \neq 0 \text{ și } (b, a) \sim (d, c)]$ .

Justificarea este elementară. Demonstrăm 4°. Dacă  $(a, b) \sim (c, d)$ ,  $a \neq 0$ , atunci  $ad = cb$ . Dacă  $c = 0$ , avem contradicția  $a = 0$ , sau  $b = 0$ . În consecință  $c \neq 0$ . Urmează că  $(b, a), (d, c) \in D$ . Dar  $ad = cb \Rightarrow (b, a) \sim (d, c)$ , q.e.d.

**Definiția 4.1.** Mulțimea  $\mathbf{Q} = D / \sim$  se numește mulțimea numerelor raționale.

Clasele lui  $D / \sim$  sînt numere raționale și vor fi notate cu  $\langle a, b \rangle$ ,  $(a, b) \in D$  fiind un reprezentant al numărului rațional  $\langle a, b \rangle$ .

Din propoziția (4.2) se deduce imediat:

**Propoziția 4.3.** Au loc proprietățile:

- 1°  $\langle a, b \rangle = \langle ac, bc \rangle, \forall c \in \mathbf{Z}^*$ ;
- 2°  $\langle a, b \rangle = \langle ac, d \rangle \Rightarrow d = bc$ ;
- 3°  $\langle a, a \rangle = \langle 1, 1 \rangle$  și  $\langle 0, a \rangle = \langle 0, 1 \rangle, \forall a \in \mathbf{Z}^*$ ;
- 4°  $[\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ și } a \neq 0] \Rightarrow [c \neq 0 \text{ și } \langle b, a \rangle = \langle d, c \rangle]$ .

**Propoziția 4.4.** Dacă au loc  $(a, b) \sim (a', b')$  și  $(c, d) \sim (c', d')$ , atunci:

$$1^\circ (ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd') \text{ și}$$

$$2^\circ (ac, bd) \sim (a'c', b'd').$$

*Demonstrație.* 1°  $(ab' = a'b \text{ și } cd' = c'd) \Rightarrow ab'dd' + cd'bb' = a'bdd' + c'dbb' \Rightarrow (ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$ .

2°  $(ab' = a'b \text{ și } cd' = c'd) \Rightarrow acb'd' = a'c'bd \Rightarrow (ac, bd) \sim (a'c', b'd')$ .

**Propoziția 4.5.** Aplicațiile  $+: \mathbf{Q}^2 \rightarrow \mathbf{Q}$  și  $\cdot: \mathbf{Q}^2 \rightarrow \mathbf{Q}$  definite prin  $\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle ad + bc, bd \rangle$ , respectiv  $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac, bd \rangle$ , nu depind de reprezentanții  $(a, b), (c, d)$  ai numerelor raționale  $\langle a, b \rangle$ , respectiv  $\langle c, d \rangle$ .

Aplicînd propoziția 4.4, rezultă imediat afirmația.

Așadar  $+$  și  $\cdot$ , date de ultima propoziție, sînt operații pe mulțimea  $\mathbf{Q}$  a numerelor raționale. Le numim adunarea și înmulțirea numerelor raționale.

**Teorema 4.1.** Mulțimea  $\mathbf{Q}$  a numerelor raționale, împreună cu operațiile de adunare „ $+$ ” și înmulțire „ $\cdot$ ”, este un cîmp (corp comutativ).

*Demonstrație.* 1)  $(\mathbf{Q}, +)$  este un grup abelian:

$$\begin{aligned} \langle \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle \rangle + \langle e, f \rangle &= \langle ad + bc, bd \rangle + \\ + \langle e, f \rangle &= \langle adf + bcf + bde, bdf \rangle = \langle a, b \rangle + \\ &+ \langle \langle c, d \rangle + \langle e, f \rangle \rangle; \end{aligned}$$

$\langle a, b \rangle + \langle 0, 1 \rangle = \langle a, b \rangle$ , deci  $\langle 0, 1 \rangle$  este elementul neutru al adunării. Opusul elementului  $\langle a, b \rangle$  este numărul rațional  $\langle -a, b \rangle$ . În fine,  $\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle c, d \rangle + \langle a, b \rangle$ .

2)  $(\mathbf{Q}, \cdot)$  este semigrup abelian cu unitate.

$$\begin{aligned} \langle \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle \rangle \cdot \langle e, f \rangle &= \langle ac, bd \rangle \cdot \langle e, f \rangle = \\ &= \langle abe, bdf \rangle = \langle a, b \rangle \cdot \langle \langle c, d \rangle \cdot \langle e, f \rangle \rangle; \\ \langle a, b \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle &= \langle a, b \rangle \text{ și } \langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \\ &= \langle ac, bd \rangle = \langle c, d \rangle \cdot \langle a, b \rangle. \end{aligned}$$



3)  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0, 1\}$  și  $\cdot$  este grup comutativ.

Avem de arătat că  $\langle a, b \rangle \neq \langle 0, 1 \rangle$  are un invers în raport cu înmulțirea. Dar  $\langle a, b \rangle \neq \langle 0, 1 \rangle \Rightarrow a \neq 0$ . Atunci  $\langle a, b \rangle \cdot \langle b, a \rangle = \langle ab, ab \rangle = \langle 1, 1 \rangle$ , (deoarece  $ab \neq 0$ ). Deci, pentru  $a \neq 0, \langle a, b \rangle^{-1} = \langle b, a \rangle$ .

4) Înmulțirea este distributivă față de adunare.  $(\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle) \cdot \langle e, f \rangle = \langle ad + bc, bd \rangle \cdot \langle e, f \rangle = \langle ade + bce, bdf \rangle = \langle a, b \rangle \cdot \langle e, f \rangle + \langle c, d \rangle \cdot \langle e, f \rangle$ , q.e.d.

Vom construi acum o relație de ordine totală în  $\mathbf{Q}$  și vom arăta că ea este compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire a numerelor raționale. Particularizînd în propoziția 4.3.1°  $e = -1$ , obținem  $\langle a, b \rangle = \langle -a, -b \rangle$  și rezultă că pentru orice număr rațional  $\langle a, b \rangle$ , putem determina un reprezentant  $(a, b)$  sau  $(-a, -b)$  încît al doilea factor al său,  $b$  sau  $-b$ , să fie pozitiv, adică  $\mathbf{Q} = \{\langle a, b \rangle : a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}_+\}$ . Fie atunci

$$\mathbf{Q}_+ = \{\langle a, b \rangle : a \in \mathbf{Z}_+, b \in \mathbf{Z}_+\}, 0 = \langle 0, 1 \rangle \text{ și}$$

$$\mathbf{Q}_- = \{\langle a, b \rangle : a \in \mathbf{Z}_-, b \in \mathbf{Z}_+\}.$$

**Propoziția 4.6.** 1° Mulțimile  $\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_-$  și  $\{0\}$  alcătuiesc o partiție pentru  $\mathbf{Q}$ . 2°  $\mathbf{Q}_+$  este parte stabilă în  $(\mathbf{Q}, +)$ . 3°  $(\mathbf{Q}_+, \cdot)$  este grup abelian.

**Definiția 4.2.** Vom spune că numărul rațional  $\langle a, b \rangle$  este mai mic decît numărul rațional  $\langle c, d \rangle$  și vom scrie  $\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle$  dacă  $\langle c, d \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbf{Q}_+$ . Scriem  $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$  dacă  $\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle$  sau  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ .

**Teorema 4.2.**  $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$  este cîmp total ordonat adică: mulțimea  $(\mathbf{Q}, \leq)$  este total ordonată și relația de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire din  $\mathbf{Q}$ .

**Demonstrație.** Conform definiției 4.2,  $\langle a, b \rangle \leq \langle a, b \rangle$ . Apoi  $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$  și  $\langle c, d \rangle \leq \langle a, b \rangle$ , prin propoziția 4.6.1°, implică  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ . Din  $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$ ,  $\langle c, d \rangle \leq \langle e, f \rangle$  avem  $\langle c, d \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbf{Q}_+ \cup \{0\}$ ,  $\langle e, f \rangle - \langle c, d \rangle \in \mathbf{Q}_+ \cup \{0\}$ , care implică  $\langle e, f \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbf{Q}_+ \cup \{0\}$  adică  $\langle a, b \rangle \leq \langle e, f \rangle$ . Principiul trihotomiei rezultă imediat aplicînd propoziția 4.6.1°. Prima parte a teoremei este dovedită.

Să arătăm acum :

$$(4.1) \quad (\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle \text{ și } \langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle c_1, d_1 \rangle) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle a, b \rangle + \langle a_1, b_1 \rangle < \langle c, d \rangle + \langle c_1, d_1 \rangle$$

(4.2)

$$(\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle \text{ și } \langle e, f \rangle \in \mathbf{Q}_+) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle a, b \rangle \cdot \langle e, f \rangle < \langle c, d \rangle \cdot \langle e, f \rangle.$$

În adevăr,  $\langle c, d \rangle - \langle a, b \rangle \in \mathbf{Q}_+$ ,  $\langle c_1, d_1 \rangle - \langle a_1, b_1 \rangle \in \mathbf{Q}_+ \cup \{0\}$  implică  $\langle c, d \rangle + \langle c_1, d_1 \rangle - (\langle a, b \rangle + \langle a_1, b_1 \rangle) \in \mathbf{Q}_+$  și (4.1) are loc. La fel se dovedește (4.2), q.e.d.

Fie  $\tilde{\mathbf{Q}} = \{\langle a, 1 \rangle : a \in \mathbf{Z}\}$ . Evident,  $\emptyset \neq \tilde{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{Q}$ . Elementele lui  $\tilde{\mathbf{Q}}$  se numesc *întregi raționali*. Restricția relației  $\leq$  la  $\tilde{\mathbf{Q}}$  determină o ordine totală pe  $\tilde{\mathbf{Q}}$ . De asemenea, se vede ușor că  $\tilde{\mathbf{Q}}$  este parte stabilă în raport cu operațiile  $+$  și  $\cdot$  din  $\mathbf{Q}$ . Atunci :

**Propoziția 4.7.**  $(\tilde{\mathbf{Q}}, +, \cdot)$  este domeniu de integritate.

**Teorema 4.3.** 1° Mulțimile  $(\mathbf{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbf{Q}, \leq)$  sînt asemenea. 2° Există un izomorfism între domeniile de integritate  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  și  $(\tilde{\mathbf{Q}}, +, \cdot)$ , care este și asemănare.

**Demonstrație.** 1° Fie  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \tilde{\mathbf{Q}}$  aplicația dată de  $f(a) = \langle a, 1 \rangle$ . Din  $f(a) = f(b)$  se deduce  $\langle a, 1 \rangle = \langle b, 1 \rangle$  care implică  $a = b$ . Deci  $f$  este injectivă. Fie  $\langle a, 1 \rangle$  un element oarecare din  $\tilde{\mathbf{Q}}$  și  $(a, 1)$  un reprezentant al său; atunci  $f(a) = \langle a, 1 \rangle$ . Urmează că  $f$  este surjectivă. Deci  $f$  este bijectivă. Să admitem acum că  $a \leq b$ ; atunci  $f(a) \leq f(b)$ , deoarece  $\langle b, 1 \rangle - \langle a, 1 \rangle = \langle b, 1 \rangle + \langle -a, 1 \rangle = \langle b-a, 1 \rangle$  și  $b-a \geq 0$ .

2° Asemănarea precedentă este și izomorfism, deoarece  $f(a+b) = \langle a+b, 1 \rangle = \langle a, 1 \rangle + \langle b, 1 \rangle = f(a) + f(b)$  și  $f(a) \cdot f(b) = \langle a, 1 \rangle \cdot \langle b, 1 \rangle = \langle ab, 1 \rangle = f(ab)$ , q.e.d.

În baza acestui rezultat mulțimile  $\mathbf{Z}$  și  $\tilde{\mathbf{Q}}$  pot fi identificate și  $\tilde{\mathbf{Q}}$  apare ca o extensie a domeniului de integritate  $\mathbf{Z}$ .

**Teorema 4.4.** Orice număr rațional  $\langle a, b \rangle \in \mathbf{Q}$  poate fi scris sub formă de produs al unui întreg rațional prin inversul unui întreg rațional.

**Demonstrație.** Fie  $\langle a, b \rangle \in \mathbf{Q}$ ,  $b \in \mathbf{Z}_+$ . Dacă  $\langle a, b \rangle = 0$ , atunci  $\langle a, b \rangle = \langle 0, b \rangle \cdot \langle b, 1 \rangle^{-1}$ . Dacă  $\langle a, b \rangle \neq 0$ , atunci  $\langle a, b \rangle = \langle a, 1 \rangle \cdot \langle b, 1 \rangle^{-1}$ , q.e.d.

**Teorema 4.5.** Corpul numerelor raționale  $\mathbf{Q}$  este extensie minimală a domeniului de integritate  $\mathbf{Z}$ .

**Demonstrație.** Orice alt corp  $\mathbf{K}$ , ce conține o submulțime  $\tilde{\mathbf{K}}$  izomorfă cu  $\mathbf{Z}$ , va conține și inversele elementelor din  $\tilde{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$ . După teorema 4.4,  $\tilde{\mathbf{K}}$  va conține un subcorp izomorf cu  $\mathbf{Q}$  și atunci  $\mathbf{Q}$  se identifică cu un subcorp din  $\mathbf{K}$ , q.e.d.



**Propoziția 4.8.**  $(\mathbb{Q}, \leq)$  este o mulțime total ordonată fără prim sau ultim element, densă.

Caracterul total al ordonării  $\leq$  a fost dovedit în teorema 4.2. Pentru orice  $x$  din  $\tilde{\mathbb{Q}}$  găsim  $x - \langle 1, 1 \rangle < x$  și  $x < x + \langle 1, 1 \rangle$  deci nu poate exista prim sau ultim element. Fie  $x = \langle a, b \rangle$  și  $y = \langle c, d \rangle$  încît  $x < y$ , adică  $ad < bc$ . Proprietatea de densitate afirmă existența măcar a unui  $z = \langle e, f \rangle$  încît  $x < z < y$ . Într-adevăr, putem lua  $z = \frac{1}{2}(x + y) = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle ad + bc, bd \rangle = \langle ad + bc, 2bd \rangle$  și se verifică ușor  $x < z, z < y$ .

Un ultim rezultat pe care îl prezentăm, referitor la corpul  $\mathbb{Q}$ , este dat de:

**Teorema 4.6.** Cîmpul  $\mathbb{Q}$  al numerelor raționale este arhimedian.

*Demonstrație.* Avem de arătat că în  $(\mathbb{Q}, \leq)$  are loc proprietatea: Dacă  $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Q}_+$  și  $\langle c, d \rangle \in \mathbb{Q}$ , atunci există un număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$  încît

$$n \cdot \langle a, b \rangle = \langle n, 1 \rangle \cdot \langle a, b \rangle > \langle c, d \rangle.$$

Pentru a justifica această proprietate fie numerele întregi  $ad > 0$  și  $cb$ . Există  $n \in \mathbb{N}^*$  încît  $nad > cb$ . Atunci  $\langle n, 1 \rangle \cdot \langle a, b \rangle = \langle na, b \rangle = \langle n, 1 \rangle \cdot \langle ad, bd \rangle > \langle cb, bd \rangle = \langle c, d \rangle$ , q.e.d.

*Observație.* Identificăm mulțimile  $\mathbb{Z}$  și  $\tilde{\mathbb{Q}}$ : întregii raționali  $\langle a, 1 \rangle$  cu  $a$  și inversul lui  $\langle b, 1 \rangle$ ,  $b \neq 0$ , cu  $\frac{1}{b}$ . Atunci  $\langle a, b \rangle = \langle a, 1 \rangle \cdot \langle 1, b \rangle = a \cdot \frac{1}{b}$  se poate nota cu  $\frac{a}{b}$ . Avem astfel  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ,  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

## § 5. MULȚIMEA R A NUMERELOR REALE

Construcția mulțimii numerelor reale este destul de complicată, dar ea constituie o problemă importantă în bazele aritmeticii. Din acest motiv vom expune aici una dintre căile posibile de construcție a numerelor reale.

Cum am văzut, cîmpul numerelor raționale  $\mathbb{Q}$  este ordonat și arhimedian. Convine să notăm acum cu  $a, b, \dots, x, y, \dots, \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  elementele sale.

Reamintim că  $\leq$  este o relație de ordine totală pe  $\mathbb{Q}$  și că ea este compatibilă cu operațiile din  $\mathbb{Q}$ .

Avem astfel,  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ ,

$$(5.1) \quad \begin{cases} a < b, c \leq d \Rightarrow a + c < b + d; \\ a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc; \\ a < b, c < 0 \Rightarrow bc < ac; \\ a^2 \in \mathbb{Q}_+, \text{ pentru } a \neq 0; 1 \in \mathbb{Q}_+; \\ ab \in \mathbb{Q}_+, a \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow b \in \mathbb{Q}_+ \end{cases}$$

Cu notațiile noastre, pentru  $a \in \mathbb{Q}^*$ , avem  $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$ .

Atunci:

$$(5.2) \quad 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

Fie funcția  $|\cdot|: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_+ \cup \{0\}$ , numită valoare absolută, definită prin

$$(5.3) \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

**Propoziția 5.1.**  $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ : 1°  $|x| = |-x|$ ; 2°  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ; 3°  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ; 4°  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

Dovedim 3°. Cum  $x \leq |x|, y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$ . Analog,  $-(x + y) \leq |x| + |y|$ , deci  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , q.e.d.

Considerăm în continuare șiruri  $(a_n)$  de elemente din  $\mathbb{Q}$ ,  $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

**Definiția 5.1.** 1° Șirul  $(a_n)$  se numește *mărginit*, dacă există  $b \in \mathbb{Q}_+$  încît  $|a_n| < b, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Fie  $\mathcal{B}$  mulțimea șirurilor mărginite.



2°  $(a_n)$  se numește *șir Cauchy* dacă pentru orice  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$  există un număr natural  $N(\varepsilon)$  încît  $|a_p - a_q| < \varepsilon$ , pentru toți  $p, q > N(\varepsilon)$ . Notăm  $\mathcal{C}$  mulțimea șirurilor Cauchy.

3°  $(a_n)$  se numește *șir nul* dacă,  $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ , există un număr natural  $N(\varepsilon)$ , încît  $|a_p| < \varepsilon$ , pentru toți  $p > N(\varepsilon)$ . Notăm cu  $\mathcal{N}$  mulțimea șirurilor nule.

**Teorema 5.1.**  $\mathcal{N} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ .

*Demonstrație.* Este clar că  $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$ . Fie  $(a_n) \in \mathcal{C}$ ; atunci  $p, q > N(1) \Rightarrow |a_p - a_q| < 1$ . Dacă  $b$  este cel mai mare dintre numerele raționale  $|a_1|, \dots, |a_{N(1)}|, |a_{N(1)}| + 1$ , atunci  $|a_p| < b$  pentru toți  $p \in \mathbb{N}^*$ , q.e.d.

Pe mulțimea  $\mathcal{S}$  a șirurilor de elemente din  $\mathbb{Q}$  definim operațiile:

$$(5.4) \quad \begin{cases} (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \\ (a_n)(b_n) = (a_n b_n) \end{cases}$$

și  $(\mathcal{S}, +, \cdot)$  este atunci un inel comutativ cu unitate.

**Teorema 5.2.** 1°  $\mathcal{C}$  este parte stabilă în  $\mathcal{S}$  în raport cu operațiile „+” și „.”;

2°  $(\mathcal{C}, +, \cdot)$  este inel comutativ cu unitate;

3°  $\mathcal{N} \neq \mathcal{C}$ ;

4°  $\mathcal{N}$  este ideal în  $\mathcal{C}$ .

*Demonstrație.* 1° Fie  $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}$ ,  $N(\varepsilon)$  și  $M(\varepsilon)$  întregii din  $\mathbb{Z}_+$  asociați acestor șiruri. Dacă  $p, q \geq \max\left\{N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$ , atunci  $|a_p + b_p - (a_q + b_q)| < \varepsilon$ . Deci  $(a_n) + (b_n) \in \mathcal{C}$ .

Fie acum  $c$  și  $d$  cu proprietatea  $|a_n| < c, |b_n| < d, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $p, q > \max\left\{N\left(\frac{\varepsilon}{2d}\right), M\left(\frac{\varepsilon}{2c}\right)\right\}$ , atunci  $|a_p b_p - a_q b_q| = |a_p b_p - a_p b_q + a_p b_q - a_q b_q| \leq |a_p| \cdot |b_p - b_q| + |b_q| \cdot |a_p - a_q| < \frac{c\varepsilon}{2d} + \frac{d\varepsilon}{2c} = \varepsilon$ .

Deci  $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{C}$ .

2°  $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ , după 1° și după observația  $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C} \Rightarrow (a_n) - (b_n) \in \mathcal{C}$ , este subinel al inelului comutativ  $\mathcal{S}$ . Șirul constant  $(1, 1, \dots)$  este șir din  $\mathcal{C}$  și este unitate în raport cu produsul din  $\mathcal{C}$ .

Proprietatea 3° este evidentă, deoarece  $(1, 1, \dots) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ .

4° Dacă  $(a_n), (b_n) \in \mathcal{N}$ , atunci evident  $(a_n) - (b_n) \in \mathcal{N}$ , deci  $(\mathcal{N}, +)$  este subgrup în  $(\mathcal{C}, +)$ . Fie  $(a_n) \in \mathcal{N}$  și  $(b_n) \in \mathcal{C}$ ; să arătăm că  $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{N}$ . Cum  $(b_n)$  este mărginit, există  $c \in \mathbb{Q}_+$  încît  $|b_n| < c, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Fie apoi  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$  oarecare. Există  $N\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$  așa ca pentru  $\forall p > N\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$  să avem  $|a_p| < \frac{\varepsilon}{c}$ . Deci, pentru  $p > N\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$ , avem  $|a_p b_p| < |a_p| \cdot c < \varepsilon$ . Urmează că  $(a_n) \cdot (b_n) \in \mathcal{N}$ , q.e.d.

**Definiția 5.2.** Mulțimea  $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$  se numește *mulțimea numerelor reale*. Notăm numerele reale cu  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Ele sînt elementele mulțimii factor  $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ , deci au forma  $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$ . Notăm cu  $\bar{0} = (0_n) + \mathcal{N} = \mathcal{N}$ ,  $(0_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$  și  $\bar{1} = (1_n) + \mathcal{N}$ ,  $(1_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*)$ ;  $\bar{0}$  se numește numărul real zero, iar  $\bar{1}$ , unitatea din  $\mathbb{R}$ :

**Propoziția 5.2.** Dacă  $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$  și  $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$  sînt numere reale oarecare, atunci:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = ((a_n) + \mathcal{N}) + ((b_n) + \mathcal{N}) = ((a_n) + (b_n)) + \mathcal{N} = (a_n + b_n) + \mathcal{N}; \\ \alpha \cdot \beta = ((a_n) + \mathcal{N}) \cdot ((b_n) + \mathcal{N}) = (a_n)(b_n) + \mathcal{N} = (a_n b_n) + \mathcal{N}, \end{cases}$$

depind numai de numerele  $\alpha$  și  $\beta$  și nu de reprezentanții  $(a_n)$  și  $(b_n)$  ai lor.

În adevăr, dacă  $\alpha = (a_n) + \mathcal{N} = (a'_n) + \mathcal{N}$ ,  $\beta = (b_n) + \mathcal{N} = (b'_n) + \mathcal{N}$ , atunci fie  $(a_n) - (a'_n) = (c_n) \in \mathcal{N}$  și  $(b_n) - (b'_n) = (d_n) \in \mathcal{N}$ . Urmează că  $\alpha + \beta = ((a_n) + \mathcal{N}) + ((b_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + (c_n) + \mathcal{N}) + ((b'_n) + (d_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + \mathcal{N}) + ((b'_n) + \mathcal{N})$ . De asemenea  $\alpha \cdot \beta = ((a_n) + \mathcal{N})((b_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + (c_n) + \mathcal{N})((b'_n) + (d_n) + \mathcal{N}) = ((a'_n) + \mathcal{N})((b'_n) + \mathcal{N})$ , q.e.d.

Putem considera atunci operațiile  $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \cdot: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $+: (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta$  și  $\cdot: (\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \cdot \beta$ , în care  $+$  și  $\cdot$  sînt date de (5.4).

**Teorema 5.3.**  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  este un cîmp.

*Demonstrație.* După teorema 5.2, rezultă că  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  este inel comutativ, cu unitate. Rămîne să arătăm că orice  $\alpha$  din  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  are invers în  $\mathbb{R}$  în raport cu înmulțirea „.”.



Fie  $\alpha = (a_n) + \mathcal{N} \neq \mathcal{N}$ , adică  $(a_n) \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{N}$ . Va trebui să determinăm un șir Cauchy  $(b_n)$  încît  $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$  să aibă proprietatea  $\alpha \cdot \beta = \bar{1}$  adică  $(a_n b_n) + \mathcal{N} = (1_n) + \mathcal{N}$  sau încă  $(a_n b_n) - (1_n) \in \mathcal{N}$ . Cum  $(a_n)$  nu este un șir nul, există un număr rațional  $e \in \mathbb{Q}_+$  astfel încît pentru orice  $r \in \mathbb{N}^*$ , există numere naturale  $s > r$  pentru care  $|a_s| > e$ . Pentru toți  $p, q > N\left(\frac{e}{2}\right)$  avem  $|a_p - a_q| < \frac{e}{2}$ .

Fie  $s > N\left(\frac{1}{2}e\right)$  astfel că  $|a_s| \geq e$ . Atunci, pentru  $p$  arbitrar,  $p \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$ , avem

$$e \leq |a_s| = |a_s - a_p + a_p| \leq |a_s - a_p| + |a_p| < \frac{1}{2}e + |a_p|.$$

Deci  $|a_p| > \frac{e}{2}$ , dacă  $p \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$ . Notăm  $m = N\left(\frac{e}{2}\right)$  și fie  $b_1 = \dots = b_{m-1} = 1$  și  $b_p = \frac{1}{a_p}$  dacă  $p \geq m$ . Avem  $(a_n b_n) = (a_1, \dots, \dots, a_{m-1}, 1, 1, \dots)$  și deci  $(a_n b_n - 1_n) = (a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_{m-1} - 1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{N}$ . Să arătăm acum că șirul  $(b_n) \in \mathcal{C}$ . Dacă  $p, q \geq N\left(\frac{e}{2}\right)$ , atunci

$$|b_p - b_q| = \left| \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q} \right| = \frac{1}{|a_p|} \cdot \frac{1}{|a_q|} |a_p - a_q| < \frac{2}{e} \cdot \frac{2}{e} \cdot |a_p - a_q|.$$

În consecință, dacă  $c$  este arbitrar în  $\mathbb{Q}_+$ , luînd  $p, q \geq \max\left\{N\left(\frac{e}{2}\right), N\left(\frac{e^2 \cdot c}{4}\right)\right\}$  avem  $|b_p - b_q| < c$ , q.e.d.

**Definiția 5.3.** Spunem că elementul  $\alpha = (a_n) + \mathcal{N}$  din  $\mathbb{R}$  este pozitiv și notăm  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  dacă există  $r \in \mathbb{Q}_+$  și un număr natural  $P(r)$ , încît  $n > P(r) \Rightarrow a_n > r$ . Spunem că elementul considerat  $\alpha$  este negativ dacă există  $r \in \mathbb{Q}_+$  și un număr natural  $P(r)$ , încît  $n > P(r) \Rightarrow a_n < -r$ ; notăm acum  $\alpha \in \mathbb{R}_-$ .

Se constată ușor că definițiile date sînt independente de reprezentantul  $(a_n)$  ales pentru  $\alpha$ . Concepem evident  $\mathbb{R}_+$  și  $\mathbb{R}_-$  drept submulțimi în  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 5.4.** 1°  $\mathbb{R}_+$  și  $\mathbb{R}_-$  sînt mulțimi disjuncte; 2°  $\alpha \in \mathbb{R}_- \Rightarrow -\alpha \in \mathbb{R}_+$ ; 3°  $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-) = \{0\}$ ; 4°  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$  și  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$ .

Demonstrațiile acestor afirmații decurg ușor pe baza definiției 5.3.

**Propoziția 5.3.** 1°  $\alpha^2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; 2°  $\bar{1} \in \mathbb{R}_+$ ; 3°  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \beta \in \mathbb{R}_+$ .

**Demonstrație.** 1° Dacă  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , atunci  $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$ , dacă  $\alpha \in \mathbb{R}_-$ , atunci  $-\alpha \in \mathbb{R}_+$  și  $(-\alpha) \cdot (-\alpha) = \alpha^2 \in \mathbb{R}_+$ ; 2°  $\bar{1} = \bar{1} \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$ ; 3° Dacă  $\beta \notin \mathbb{R}_+$ , putem avea  $\beta = \bar{0}$  și  $\alpha \cdot \beta \notin \mathbb{R}_+$  sau  $\beta \in \mathbb{R}_-$  și  $-\beta \in \mathbb{R}_+$ , astfel că  $\alpha(-\beta) = -(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{R}_+$  contrar ipotezei etc.

**Definiția 5.4.** Pentru  $\alpha$  și  $\beta$  din  $\mathbb{R}$  scriem  $\alpha < \beta$ , dacă  $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$  și  $\alpha \leq \beta$ , dacă  $\alpha < \beta$  sau  $\alpha = \beta$ . Se introduce astfel relația binară  $\leq$  pe  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 5.5.** Mulțimea  $(\mathbb{R}, \leq)$  este total ordonată și relația de ordine  $\leq$  este compatibilă cu operațiile din cîmpul  $\mathbb{R}$ .

**Demonstrație.**  $\alpha \leq \alpha$  în baza definiției 5.4. Dacă  $\alpha \leq \beta$ ,  $\beta \leq \alpha$  avem  $\alpha = \beta$ ; în caz contrar  $\alpha < \beta$ ,  $\beta < \alpha$  și  $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $-(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$ , absurd. De asemenea, proprietatea de tranzitivitate este imediată. Fie acum  $\alpha, \beta$  două numere reale oarecare;  $\beta - \alpha$  este în  $\mathbb{R}_+$ , în  $\{0\}$  sau în  $\mathbb{R}_-$  și numai în una dintre aceste mulțimi, deci avem  $\alpha < \beta$  sau  $\alpha = \beta$  sau  $\beta < \alpha$  și numai una dintre aceste relații. Urmează  $(\mathbb{R}, \leq)$  este mulțime total ordonată.

Să arătăm acum că

$$\alpha < \beta, \gamma \leq \delta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta,$$

$$\alpha < \beta, \gamma > \bar{0} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

În adevăr, din  $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\delta - \gamma \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  rezultă  $\beta + \delta - (\alpha + \gamma) \in \mathbb{R}_+$ . De asemenea,  $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (\beta - \alpha)\gamma = \beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \gamma \in \mathbb{R}_+$ , q.e.d.

În consecință  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  este un cîmp ordonat.

**Teorema 5.6.** Cîmpul numerelor reale  $\mathbb{R}$  conține un subcîmp asemenea cu cîmpul numerelor raționale  $\mathbb{Q}$ .

**Demonstrație.** Să observăm că  $n \cdot \bar{1} \neq \bar{0}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . În adevăr,  $\bar{1} \vdash \dots \vdash \bar{1} = n \cdot \bar{1} \in \mathbb{R}_+$ . Așadar  $\mathbb{R}$  este de caracteristică zero.



Considerăm aplicația  $f: \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ , definită prin  $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot \bar{1}) \times \times (n \cdot \bar{1})^{-1}$ .  $f$  este morfism de cîmpuri, deoarece

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{mq + pn}{nq}\right) = [(mq + pn)\bar{1}] \cdot [(nq)\bar{1}]^{-1} = \\ &= (m \cdot \bar{1})(n \cdot \bar{1})^{-1} + (p \cdot \bar{1})(q \cdot \bar{1})^{-1} = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right). \end{aligned}$$

În mod analog,  $f\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$ . Dacă arătăm că  $f$  este aplicație injectivă va rezulta că imaginea lui  $\mathbf{Q}$  prin  $f$  este subcîmp în  $\mathbf{R}$ . În acest scop este suficient să arătăm că  $f$  are proprietatea  $f(m) = f(n) \Rightarrow m = n$  numai pentru întregi raționali. Dar  $f(m) = f(n) \Rightarrow m \cdot \bar{1} = n \cdot \bar{1} \Rightarrow m = n$ .

Rezumînd,  $f: \mathbf{Q} \rightarrow f(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{R}$  este izomorfism de cîmpuri. Să arătăm că  $f$  este asemănare. În acest scop să observăm că pentru  $\frac{m}{n}$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$  avem  $\frac{m}{n} > 0$  și  $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot \bar{1}) \cdot (n \cdot \bar{1})^{-1}$  cu  $m \cdot \bar{1} \in \mathbf{R}_+$ ,  $n \cdot \bar{1} \in \mathbf{R}_+$ . Deci  $f\left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbf{R}_+$ . Dacă  $a < b$  în  $\mathbf{Q}$ , atunci  $b - a \in \mathbf{Q}_+$  și,  $f(b - a) = f(b) - f(a) \in \mathbf{R}_+$ , deci  $f(a) < f(b)$ , q.e.d.

În baza acestei teoreme convine să notăm  $\bar{a} = f(a)$ ,  $\forall a \in \mathbf{Q}$ .

**Teorema 5.7.** *Cîmpul numerelor reale  $\mathbf{R}$  este arhimedian.*

Fie  $\alpha \in \mathbf{R}_+$  și  $\beta \in \mathbf{R}$  două numere reale. Să arătăm că există  $n \in \mathbf{N}$  așa ca  $n \cdot \alpha > \beta$ , ( $n \cdot \alpha$  fiind  $\alpha + \dots + \alpha$ ,  $n$ -termeni). Dacă  $\beta < \alpha$ , atunci existența lui  $n$  este evidentă. Fie  $0 < \alpha < \beta$ . Se vede ușor că există  $e \in \mathbf{Q}_+$  așa ca  $\bar{e} = (e, e, \dots) + \mathcal{N}$  are proprietatea  $0 < e < \alpha$ . Fie  $\beta = (b_n) + \mathcal{N}$ . Șirul  $(b_n)$  fiind mărginit există  $\bar{d} \in \mathbf{Q}$  încît  $\beta < \bar{d}$ . Numerelor raționale  $e > 0$  și  $\bar{d}$  le putem aplica axioma lui Arhimede: există  $n \in \mathbf{N}^*$  încît  $ne > \bar{d}$ ; urmează  $n\bar{e} > \bar{d}$ . Atunci  $n\alpha > n\bar{e} > \bar{d} > \beta$ , q.e.d.

**Definiția 5.5.** Spunem că șirul  $(a_n) \in \mathbf{Q}$  are limita  $b \in \mathbf{Q}$  și scriem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$  sau  $a_n \rightarrow b$ , dacă pentru orice  $e \in \mathbf{Q}_+$  există un număr natural  $N(e)$  încît  $|a_n - b| < e$ , pentru toți  $n \geq N(e)$ .

**Propoziția 5.4.** *Orice șir de numere raționale care are limită este șir Cauchy.*

Demonstrația este elementară.

**Observație.** Se construiesc ușor exemple de șiruri Cauchy de numere raționale care nu au limită. Din acest motiv se spune despre  $\mathbf{Q}$  că nu este „complet”.

Noțiunile de valoare absolută, șir Cauchy și de șir cu limită se extind imediat la  $\mathbf{R}$ . Cu noțiunile astfel extinse se formulează o teoremă importantă a cărei demonstrație ne vom mărgini să o schișăm.

**Teorema 5.8.** *Cîmpul  $\mathbf{R}$  al numerelor reale este „complet” adică orice șir Cauchy de numere reale admite limită în  $\mathbf{R}$ .*

Fie  $(\alpha_p)$  un șir Cauchy în  $\mathbf{R}$ . Pentru fiecare indice  $p$  fixat din  $\mathbf{N}^*$ ,  $\alpha_p$  este deci un număr real pentru care putem alege un reprezentant  $(a_{p,n})$ , șir Cauchy în  $\mathbf{Q}$ . Să considerăm acum pentru fiecare  $n$  din  $\mathbf{N}^*$  numărul rațional  $b_n = a_{n,n}$ . Pe baza unor detalii tehnice pe care le omitem, constatăm că șirul  $(b_n)$  de numere raționale este Cauchy și reprezintă deci un număr real  $\beta$ . Se demonstrează în final că are loc  $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \beta$ .

**Observație.** Aplicînd cîmpului  $\mathbf{R}$  aceeași construcție pe care am aplicat-o lui  $\mathbf{Q}$  ca să obținem  $\mathbf{R}$  se găsește un cîmp  $\bar{\mathbf{R}}$ , care însă este asemenea cu  $\mathbf{R}$ . Urmează că extensia lui  $\mathbf{Q}$ , obținută pe calea indicată în prezentul paragraf, este unică pînă la un izomorfism.

## § 6. MULȚIMEA C A NUMERELOR COMPLEXE

Cîmpul  $\mathbf{R}$  al numerelor reale prezintă și el o lipsă de natură algebrică, în sensul că nu orice ecuație algebrică cu coeficienți din  $\mathbf{R}$  are soluții în  $\mathbf{R}$ . De exemplu ecuația  $x^2 + 1 = 0$  nu are rădăcinile în  $\mathbf{R}$ . Se procedează atunci la o nouă extindere a corpului numerelor reale într-un corp în care această lacună nu mai are loc.

Construcția acestui corp, numit corpul numerelor complexe, poate fi făcută în diverse moduri. Prezentăm aici o cale simplă și directă.

Fie  $\mathbf{R}[X]$  inelul polinoamelor peste cîmpul  $\mathbf{R}$ , cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire.  $\mathbf{R}[X]$  este inel comutativ cu unitate.

**Propoziția 6.1.**  $J = \{(X^2 + 1)p(X) : p(X) \in \mathbf{R}[X]\}$  este ideal în inelul  $\mathbf{R}[X]$ .

În adevăr, pentru două polinoame din  $J$ , diferența lor aparține lui  $J$ , iar produsul unui polinom din  $J$  cu un polinom din  $\mathbf{R}[X]$  aparține de asemenea lui  $J$ .



**Definiția 6.1.**  $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/J$  se numește mulțimea numerelor complexe. Vom nota de acum în continuare cu  $0, 1, a, b, c, \dots$  numerele reale.

Elementele lui  $\mathbb{C}$  sînt de forma  $p(X) + J$ . Operațiile de adunare și înmulțire din  $\mathbb{R}[X]$  induc prin factorizare operațiile pe  $\mathbb{C}$ :

$$(6.1) \quad \begin{aligned} (p(X) + J) + (q(X) + J) &= (p(X) + q(X)) + J, \\ (p(X) + J)(q(X) + J) &= (p(X)q(X) + J, \end{aligned}$$

care depind numai de numerele complexe considerate și nu de reprezentanții lor.

**Propoziția 6.2.** Orice număr complex  $p(X) + J$  poate fi scris în mod unic sub forma redusă  $(a + bX) + J$  cu  $a, b$  numere reale.

*Demonstrație.* Fie  $p(X) + J$  numărul complex considerat. Polinomul  $p(X)$  se scrie în mod unic sub forma

$$p(X) = (X^2 + 1)q(X) + (a + bX)$$

Atunci

$$p(X) + J = (a + bX) + J$$

**Corolarul 6.2.** Avem

$$(a + bX) + J = (a' + b'X) + J \Rightarrow a = a', b = b'.$$

Convine să considerăm numerele complexe scrise sub forma redusă.

**Propoziția 6.3.** Suma și produsul numerelor complexe sînt date de:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} [(a + bX) + J] + [(a_1 + b_1X) + J] &= (a + a_1) + (b + b_1)X + J \\ [(a + bX) + J] \cdot [(a_1 + b_1X) + J] &= (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)X + J \end{aligned}$$

În adevăr, după (6.1) prima dintre aceste egalități este imediată. A doua egalitate din (6.1) conduce la:

$$\begin{aligned} [(a + bX) + J] \cdot [(a_1 + b_1X) + J] &= (a + bX)(a_1 + b_1X) + J = \\ &= (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)X + bb_1(X^2 + 1) + J = \\ &= (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)X + J. \end{aligned}$$

**Teorema 6.1.**  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  este un cîmp.

*Demonstrație.*  $\mathbb{C}$  fiind dat de factorizarea unui inel comutativ unitar  $\mathbb{R}[X]$  printr-un ideal  $J$  al său,  $\mathbb{C}$  este un inel comutativ, cu unitate. Rămîne să dovedim că pentru fiecare  $(a + bX) + J \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  există invers la înmulțire și acesta este din  $\mathbb{C}$ .

Dar  $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}X + J$  are proprietatea cerută, q.e.d.

Convine să scriem numărul complex  $(a + bX) + J$  sub forma  $a + bi$ ;  $a$  se numește *partea reală*, iar  $b$  *partea imaginară* a numărului complex  $a + bi$ .

**Teorema 6.2.** Cîmpul  $\mathbb{C}$  al numerelor complexe conține un sub-cîmp izomorf cu cîmpul numerelor reale.

În adevăr, aplicația  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definită prin  $f(a) = a + 0i$  are proprietățile:

$$f(a + b) = f(a) + f(b), f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

și este injectivă, q.e.d.

**Teorema 6.3.** Nu există o relație de ordine totală pe  $\mathbb{C}$  compatibilă cu operațiile din  $\mathbb{C}$ .

*Demonstrație.* Să admitem prin absurd că există o relație de ordine totală  $\leq$  pe  $\mathbb{C}$ . Atunci avem fie  $0 < i$ , fie  $i < 0$ . Cum  $\leq$  este compatibilă cu operațiile, din  $0 < i$  rezultă  $i \cdot 0 < i^2$ , sau  $0 < -1$ . Absurd, deoarece restricția lui  $\leq$  la numerele de forma  $a + 0i$  dă relația de totală ordonare pe  $\mathbb{R}$ . Dacă  $i < 0$ , atunci  $-i > 0$  și  $(-i)(-i) > 0 \Rightarrow -1 > 0$ , de asemenea absurd, q.e.d.

*Observație.* Se dovedește în cursurile de algebră că  $\mathbb{C}$  este cîmp algebric închis. Adică orice ecuație algebrică cu coeficienți din  $\mathbb{C}$  are rădăcinile în  $\mathbb{C}$ . De exemplu  $X^2 + 1 = 0$  are rădăcinile  $i$  și  $-i$ .



Teoria mulțimilor, a numerelor naturale, întregi, raționale, reale și complexe expuse în capitolele precedente au fost realizate prin metode constructive. A doua cale de edificare a noțiunilor și teoriilor matematice este cea axiomatică. Actualmente această cale conduce la o metodă utilizată frecvent, cu rezultate satisfăcătoare.

## § 1. SISTEME DEDUCTIVE

**Definiția 1.1.** Un sistem deductiv sau o teorie  $T$  este dat de :

- 1° Un sistem de noțiuni  $\{N_a\}$  și de relații  $\{R_b\}$ ;
- 2° Sistemul  $\{P_c\}$  de propoziții corect construite exprimate cu noțiunile  $N_a$  și relațiile  $R_b$ ;
- 3° Un sistem de reguli de deducție  $\{L_s\}$ ;
- 4° Subsistemul propozițiilor adevărate  $\{A_d\} \subset P_c$ , încît
  - a)  $\{P_c\}$  este stabil în raport cu  $\{L_s\}$ , (adică orice consecință a propozițiilor corect construite obținută pe baza regulilor de deducție este o propoziție corect construită);
  - b)  $\{A_d\}$  este stabil în raport cu  $\{L_s\}$ .

Definiția precedentă a noțiunii de teorie este generală. Din acest motiv este oarecum vagă. Va trebui să precizăm în continuare termenii subliniați.

Noțiunea de subteorie  $T'$  a unei teorii  $T$  este imediată :  $T'$  va fi formată din părți ale sistemelor  $\{N_a\}$ ,  $\{R_b\}$ ,  $\{P_c\}$ ,  $\{A_d\}$  încît a) și b) sînt satisfăcute.

Fie  $T$  o teorie și  $L$  o subteorie fixată în  $T$  numită logica teoriei  $T$ . Atunci  $T \setminus L$  se numește partea specifică a teoriei.

Vom presupune că în fiecare teorie considerată, logica sa este precizată.

**Definiția 2.2.** Se numește teorie axiomatică o teorie  $T$  pentru care :

1° Sînt date subsistemele  $\{N_{a'}\} \subset \{N_a\}$ ,  $\{R_{b'}\} \subset \{R_b\}$ , pe care le numim noțiuni primare și relații primare — sau fundamentale, încît celelalte noțiuni din  $\{N_a\} \setminus \{N_{a'}\}$  și relații din  $\{R_b\} \setminus \{R_{b'}\}$ , să poată fi deduse logic din cele fundamentale.

2° Este dat un subsistem  $\{A_{a'}\} \subset \{A_d\}$  de propoziții adevărate, numite axiome, încît celelalte propoziții adevărate,  $\{A_d\} \setminus \{A_{a'}\}$  să poată fi deduse logic din axiome.

Noțiunile și relațiile care nu sînt primare se numesc noțiuni și relații derivate. Propozițiile adevărate, din  $\{A_d\}$ , care nu sînt axiome se numesc teoreme.

O primă clasificare a teoriilor axiomatice se face pe calea formalizării. Înțelegem prin formalizare a unei teorii  $T$  considerarea termenilor subliniați ca entități pur formale, niște simboluri date a priori în cadrul teoriei, fără a fi definiți într-un mod oarecare, abstracție făcînd de realitatea obiectivă din care provin. Formalizarea unei teorii axiomatice se poate face gradat considerînd partea logică și partea specifică ale ei.

O teorie axiomatică  $T$  se numește neformalizată dacă nici unul dintre termenii subliniați în definiția 1.1 nu este formalizat. Aceasta înseamnă că noțiunile și relațiile primare sînt determinate de anumite obiecte materiale, pe care le cunoaștem pe cale intuitiv descriptivă, iar axiomele sînt propoziții al căror adevăr este neîndoielnic și care exprimă proprietăți ale obiectelor materiale considerate. Logica, într-o atare teorie, este logica bunului simț matematic, formată în practica milenară a omului.

*Exemplu.* Teoria axiomatică a lui Euclid a geometriei euclidiene este neformalizată. Noțiunile fundamentale : punct, dreaptă, plan sînt date pe baza descrierii intuitive, axiomele exprimă proprietăți neîndoielnice ale acestora, sugerate de experiență. Logica este cea a bunului simț.

În matematica contemporană teoriile axiomatice neformalizate nu sînt considerate riguroase.

O teorie axiomatică se numește semiformalizată, dacă partea sa specifică este formalizată, iar partea logică este neformalizată. Aceasta înseamnă că noțiunile și relațiile primare sînt niște simboluri date inițial în cadrul teoriei, iar axiomele se consideră ca propoziții adevărate date de la început în cadrul teoriei. Logica considerată este logica bunului simț matematic. Într-o asemenea teorie axiomatice, în care partea specifică nu mai este bazată pe intuiție, rațio-



namele vor fi riguroase. Acesta este motivul pentru care majoritatea teoriilor matematice actuale sînt teorii axiomatice semiformalizate. În această situație se găsesc algebra, geometria, analiza etc.

Numim *formalizată* o teorie axiomatică în care partea specifică și partea logică sînt formalizate. În cadrul unei astfel de teorii se obține un grad maxim de rigoare.

Ne vom ocupa, în paginile acestei cărți, numai cu teorii semiformalizate. Să observăm că formalizarea acceptată în teoriile semiformalizate nu înseamnă că noțiunile și relațiile primare și axiomele date inițial sînt creații pure ale conștiinței. Noi facem abstracție de suportul lor material, obiectiv, pentru a feri teoria de impurități. Pînă la urmă adevărul unei teorii axiomatice semiformalizate sau formalizate se verifică tot prin criteriul practicii, așa cum se va vedea în paragrafele următoare.

Dacă pentru o teorie axiomatică  $T$  se face efectiv o alegere a noțiunilor și relațiilor primare și a axiomelor se spune că avem o *axiomatizare* a lui  $T$ , iar această alegere ne dă un *sistem de axiome* pentru  $T$ .

Dacă se aleg două sisteme de axiome pentru  $T$ , atunci se pune problema echivalenței lor, care este lesne de formulat.

## § 2. METATEORIA UNEI TEORII AXIOMATICE

Interesează proprietățile unei teorii axiomatice, structura sa internă, relațiile cu alte teorii. O atare analiză a unei teorii axiomatice se numește *metateorie*.

În analiza metateoretică a unei teorii axiomatice  $T$  vom utiliza două puncte de vedere.

Punctul de vedere *sintactic* constă în analiza modului de construcție a teoriei  $T$ . Studiul lui  $T$  din acest punct de vedere se numește *sintaxa* lui  $T$ .

Punctul de vedere *semantic* este analiza teoriei  $T$  prin intermediul interpretărilor și modelelor. Aplicarea lui conduce la *semantica* teoriei  $T$ .

Se numește interpretare a unei teorii axiomatice  $T$ , asocierea (reprezentarea) la noțiunile și relațiile primare din  $T$  a unor noțiuni și relații primare dintr-o teorie  $T'$ , eventual neformalizată. Cu alte cuvinte în  $T'$  noțiunile primare pot fi elementele unei mulțimi date.

Un model al teoriei axiomatice  $T$  este o interpretare  $T'$  în care axiomele lui  $T$  se reprezintă pe adevăruri din  $T'$ .

În continuare notăm cu  $T$  o teorie axiomatică oarecare. Important pentru metateoria lui  $T$  sînt problemele necontradicției, independenței, completitudinii și categoricității.

### 1° PROBLEMA NECONTRADICȚIEI

**Definiția 2.1.**  $T$  se numește *necontradictorie* dacă în  $T$  nu există o propoziție  $p$  încît  $p$  și negația ei,  $\neg p$ , să se deducă din axiome.

Dacă  $T$  este necontradictorie se spune că sistemul de axiome din  $T$  este necontradictoriu.

Din definiția 2.1 rezultă că necontradicția lui  $T$  aparține sintaxei sale. Punctul de vedere sintactic în studiul necontradicției lui  $T$  nu poate fi aplicat direct. Se adoptă atunci următorul principiu: *Orice teorie axiomatică necontradictorie admite cel puțin un model (adică este „consistentă”) și reciproc.*

Rezultă de aici că o teorie axiomatică necontradictorie definește un model al său.

A studia necontradicția lui  $T$  prin metoda semantică revine deci la construcția unui model  $T'$  al lui  $T$ , dar  $T'$  trebuie să fie ea însăși necontradictorie. În mod obișnuit se acceptă necontradicția aritmeticii și apoi ea servește drept sursă de modele pentru teorii axiomatice semiformalizate  $T$ .

### 2° PROBLEMA INDEPENDENȚEI

**Definiția 2.2.** O axiomă  $A$  din  $T$  este independentă de celelalte axiome ale lui  $T$  dacă  $A$  nu se poate deduce logic din restul axiomelor lui  $T$ .

În mod analog se definește independența noțiunilor și relațiilor primare ale lui  $T$ .

Sistemul  $T$  se numește *independent sau minimal* dacă fiecare noțiune, relație sau axiomă a sa este independentă de celelalte.

Independența unei axiome de celelalte nu se justifică întotdeauna ușor pe cale sintactică. Putem stabili însă un procedeu semantic util în rezolvarea acestei probleme.

Fie  $A_n$  una dintre axiomele  $A_a$  ale unei teorii axiomatice  $T$ . Considerăm sistemul de axiome  $\{A'_a\}$  ce se obține din  $\{A_a\}$  păstrînd toate axiomele  $A_a$  cu  $a \neq n$  și înlocuind axioma  $A_n$  prin negația sa,  $\neg A_n$ . Notăm prin  $T_{(n)}$  teoria axiomatice care are aceleași noțiuni și relații primare ca  $T$  dar avînd  $\{A'_a\}$  drept sistem de axiome. (Această operație este realizabilă cînd  $A_n$  nu intervine în formularea celorlalte axiome.)



**Propoziția 2.1.** *Axioma  $A_n$  este independentă în  $T$  dacă și numai dacă teoria axiomatică  $T_{(n)}$  este necontradictorie.*

*Demonstrație.* Dacă  $A_n$  este independentă, excluzînd-o din  $T$  nu o putem deduce logic deci  $T_{(n)}$  și  $T$  sînt ambele necontradictorii. Reciproc,  $T_{(n)}$  fiind necontradictorie,  $A_n$  și  $\neg A_n$  nu sînt ambele adevărate, deci  $A_n$  nu se deduce din celelalte axiome.

Minimalizarea unei teorii axiomatice poate contribui substanțial în evoluția matematicii; de exemplu studiul independenței postulatului euclidian al paralelelor a impulsat dezvoltarea cantitativă și calitativă a geometriei.

### 3° PROBLEMA COMPLETITUDINII ȘI CATEGORICITĂȚII

**Definiția 2.3.** O teorie axiomatică  $T$  se numește *completă* dacă, pentru orice propoziție  $p$  corect construită (necontradictorie) rezultă:  $p$  sau  $\neg p$  se pot deduce din axiome.

Dacă  $T$  este completă, atunci sistemul de axiome al lui  $T$  se numește complet. În caz contrar el este incomplet.

Două modele ale unei teorii  $T$  se numesc izomorfe dacă între ele se poate stabili o corespondență biunivocă care păstrează proprietățile adevărate ale lor.

**Definiția 2.4.** O teorie axiomatică  $T$  se numește *categorică*, dacă toate modelele ei sînt izomorfe între ele.

**Propoziția 2.2.** *Orice teorie axiomatică categorică este completă.*

În adevăr, fie  $T$  o teorie axiomatică categorică dar incompletă și  $p$  o propoziție corect construită pentru care nici  $p$ , nici  $\neg p$  nu se deduc din axiome. Fie  $T_1$  teoria care se obține adăugînd  $p$  axiomei lui  $T$  și  $T_2$  cea obținută din  $T$  adăugînd axiomei sale pe  $\neg p$ .  $T_1$  și  $T_2$  sînt necontradictorii. Dacă  $T'_1$  este un model al lui  $T_1$  și  $T'_2$  un model al lui  $T_2$ , atunci  $T'_1$  și  $T'_2$  sînt și modele ale lui  $T$ . Din categoricitatea lui  $T$  rezultă că  $T'_1$  și  $T'_2$  sînt izomorfe și atunci  $T'_2$  este un model pentru  $T_1$ . Prin urmare în  $T_2$  are loc  $p$  și  $\neg p$  ceea ce este absurd.

Cu aceasta am încheiat lista problemelor importante din metateoria unui sistem axiomatice.

Terminăm acest paragraf cu o noțiune importantă, aceea de *structură matematică*.

Cum s-a văzut, orice teorie axiomatică  $T$  definește indirect un model  $T'$  al său și studiul teoriei  $T$  poate fi făcut pe modelul  $T'$ . Dar  $T'$  poate fi format dintr-un sistem de mulțimi și relații, care satisfac la niște axiome date. În consecință se poate da următoarea definiție.

**Definiția 2.5.** Se numește *structură matematică* o mulțime, prevăzută cu anumite relații, astfel încît elementele sale și relațiile date satisfac un sistem de axiome.

Teoria axiomatică a unei structuri matematice este teoria sistemului de axiome considerat, în care noțiunile și relațiile primare sînt elementele mulțimii și relațiile date. Problemele de metateorie se aplică acestei teorii.

Noțiunea de structură matematică este utilizată de grupul de matematicieni francezi, Bourbaki, pentru clasificarea teoriilor matematice, clasificare care merge de la tipurile simple de teorii matematice, cum sînt structurile algebrice, la tipurile complexe cum ar fi analiza matematică și geometria diferențială. Se obține astfel un edificiu unitar, bazat pe metoda axiomatice.

### § 3. AXIOMATICA LUI PEANO A ARITMETICII

Considerațiile făcute în primele două paragrafe ale acestui capitol privitoare la teoriile axiomatice și metateoria lor vor fi concretizate în cazul axiomaticei lui Peano a numerelor naturale.

În teoria constructivă a numerelor naturale, elementele mulțimii  $N$  au fost construite. Acum vom presupune că ele sînt date *a priori*. Anume, considerăm drept noțiuni primare: *zero*, notat  $0$  și *număr natural*, notat  $a, b, \dots, x, y, \dots$ . Presupunem dată o singură relație primară, cea de „succesor”; succesorul unui număr natural  $a$  va fi notat cu  $a'$ .

Vom mai folosi simbolurile  $=$  și  $\neq$  în sensul și cu proprietățile identității logice. Nu vom utiliza, decît cu mici excepții, notațiile din teoria mulțimilor pentru a nu confunda teoria pe care o avem în vedere cu o structură matematică.

**Axiomele sistemului Peano :**

- $A_1$ . Zero este număr natural.
- $A_2$ . Orice număr natural admite un succesor unic, care este tot număr natural.
- $A_3$ . Zero nu este succesorul niciunui număr natural.
- $A_4$ . Dacă succesorii a două numere naturale coincid, atunci numerele considerate coincid.
- $A_5$ . Dacă o mulțime de numere naturale conține pe zero și pentru fiecare număr din această mulțime succesorul său aparține mulțimii, atunci mulțimea considerată coincide cu mulțimea tuturor numerelor naturale.

Axioma  $A_5$  va fi numită *principiul inducției* sau *axioma inducției*.



A dezvolta teoria dată de sistemul axiomatic al lui Peano înseamnă a obține toate consecințele logice, din noțiunile și relațiile primare și din axiomele date.

Citeva consecințe imediate.

**Propoziția 3.1.**  $a = b$  implică  $a' = b'$ .

Se aplică  $A_2$ .

**Propoziția 3.2.**  $a \neq b$  implică  $a' \neq b'$ .

În caz contrar,  $a' = b'$  și axioma  $A_4$  dă  $a = b$ , absurd.

**Observație.** Putem considera mulțimea  $N$  a numerelor naturale.  $0$  va fi un element din  $N$ , conform axiomei  $A_1$ . Putem acum concepe „ $'$ ” drept o funcție injectivă definită pe  $N$  cu valori în  $N$ .

**Propoziția 3.3.** Pentru orice număr natural  $a$  diferit de zero, există un număr natural  $b$ , încât  $a = b'$  și  $b$  este unic.

În adevăr, fie  $M$  mulțimea formată din zero și din acele numere naturale  $a$  care au proprietatea din prima parte a enunțului. Atunci  $0$  este în  $M$ ; dacă  $a$  este în mulțimea  $M$ , avem  $a = b'$ . Dar atunci  $a' = (b')'$  are proprietatea menționată, deci  $a'$  este în  $M$ . Aplicând axioma inducției rezultată  $M = N$ . Unicitatea lui  $b$ , după axioma  $A_4$ , este evidentă.

**Teorema 3.1.** Pentru fiecare număr natural  $a$  există o singură funcție  $f_a : N \rightarrow N$  care are proprietățile

$1^\circ f_a(0) = a$  și  $2^\circ f_a(b') = [f_a(b)]'$ .

**Demonstrație.** Fie  $M$  mulțimea numerelor naturale  $a$  pentru care funcția  $f_a$ , cu proprietățile  $1^\circ$  și  $2^\circ$ , există. Funcția  $f_0 = 1_N$  are proprietățile  $1^\circ$  și  $2^\circ$  deoarece  $f_0(0) = 0$ ,  $f_0(b') = b' = [f_0(b)]'$ . Prin urmare zero aparține lui  $M$ . Dacă  $a$  este un element oarecare din  $M$ , atunci considerăm funcția  $f_a : N \rightarrow N$ , dată de  $f_a(b) = [f_a(b)]'$ , ceea ce revine la  $f_a' = ' \circ f_a$ . Să arătăm că  $f_a$  satisface  $1^\circ$  și  $2^\circ$ . În adevăr,  $f_a(0) = (f_a(0))' = a'$  și  $f_a(b') = [f_a(b)]' = [(f_a(b))']' = [f_a(b)]'$ . Deci  $a'$  aparține lui  $M$ . Aplicând  $A_5$  urmează că  $M$  coincide cu  $N$ . Existența lui  $f_a$  pentru fiecare  $a$  din  $N$  este dovedită.

Să presupunem prin absurd că pentru un anumit număr natural  $a$  ar exista o funcție  $h_a$  ce satisface condițiile  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  dar  $h_a \neq f_a$ . Deducem că mulțimea  $D = \{x : h_a(x) \neq f_a(x)\}$  este nevidă. Constatăm însă  $h_a(0) = a = f_a(0)$  deci  $0 \in N \setminus D$  și apoi :

$$n \in N \setminus D \Rightarrow h_a(n) = f_a(n) \Rightarrow h_a(n') = f_a(n') \Rightarrow n' \in N \setminus D.$$

Deci, conform  $A_5$ ,  $N \setminus D = N$ , adică  $D = \emptyset$ , în contradicție cu ipoteza făcută.

**Definiția 3.1.** Se numește *adunarea numerelor naturale* aplicația  $+: N \times N \rightarrow N$  dată pe  $+: (a, b) \rightarrow a + b = f_a(b)$ , pentru orice  $a$  și  $b$  din  $N$ .

**Teorema 3.2.** Operația de adunare a numerelor naturale are proprietățile :

$1^\circ a + 0 = a$ , pentru orice  $a$  din  $N$ ;

$2^\circ a + b' = (a + b)'$ , pentru toți  $a$  și  $b$  din  $N$ .

În adevăr, conform definiției 3.1 și teoremei 3.1 :

$$a + 0 = f_a(0) = a, a + b' = f_a(b') = (f_a(b))' = (a + b)', \text{ q.e.d.}$$

**Teorema 3.3.** Adunarea numerelor naturale are proprietățile :

$1^\circ a + (b + c) = (a + b) + c$ , pentru orice  $a, b, c$  din  $N$ ;

$2^\circ a + 0 = 0 + a = a$ , pentru orice  $a$  din  $N$ ;

$3^\circ a + b = b + a$ , pentru orice  $a, b$  din  $N$ ;

$4^\circ a + 1 = 1 + a = a'$ ,  $1 = 0'$ , pentru orice  $a$  din  $N$ ;

$5^\circ a + b = a + c$  implică  $b = c$ .

**Demonstrație.**  $1^\circ$  Aplicăm inducția în raport cu  $c$ , folosind teorema 3.2 :  $a + (b + 0) = a + b = (a + b) + 0$ . Apoi dacă  $1^\circ$  este satisfăcută de  $c$ , atunci  $a + (b + c') = a + (b + c)' = [a + (b + c)]' = [(a + b) + c]' = (a + b) + c'$ . Deci  $1^\circ$  este verificată pentru toți  $c$ .

$2^\circ a + 0 = a$  este adevărată pe baza definiției adunării numerelor naturale. Pentru a dovedi  $0 + a = a$  aplicăm inducția după  $a$ .  $0 + 0 = 0$ , apoi admitînd  $0 + a = a$ , avem  $(0 + a)' = 0 + a' = a'$ .

$3^\circ$  Demonstrăm, prin inducție după  $n$ , egalitatea pregătitoare  $n + 0' = 0' + n$ . Dovedim apoi  $3^\circ$ , aplicînd inducția după  $b$  :  $a + 0 = 0 + a$  din  $2^\circ$ . În ipoteza  $a + b = b + a$ , folosind  $1^\circ$  și egalitatea auxiliară, deducem :  $a + b' = a + (b + 0)' = a + (b + 0') = (a + b) + 0' = (b + a) + 0' = b + (a + 0') = b + (0' + a) = (b + 0') + a = b' + a$ , etc.

$4^\circ$  Punînd  $0' = 1$ , din demonstrația lui  $3^\circ$  avem  $a + 1 = 1 + a = a'$ .

$5^\circ$  Aplicînd principiul inducției după  $a$  proprietatea rezultă imediat.

**Teorema 3.4.** Pentru fiecare număr natural există o singură funcție  $g_a : N \rightarrow N$  care are proprietățile

$1^\circ g_a(0) = 0$ , și  $2^\circ g_a(b') = g_a(b) + a$ .



**Demonstrație.** Aplicăm axioma inducției pentru a dovedi existența funcției  $g_a$ . Fie  $M$  mulțimea acelor numere naturale  $a$  pentru care  $g_a$  există. Aplicația constantă  $g_0: \mathbb{N} \rightarrow \{0\}$  are proprietățile 1° și 2°. Deci 0 aparține lui  $M$ . Presupunind că  $a$  aparține lui  $M$ , deci că există  $g_a$  cu proprietățile 1° și 2° considerăm aplicația  $g_{a'}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , dată de  $g_{a'}(b) = g_a(b) + b$ , pentru orice  $b$  din  $\mathbb{N}$ . Verificăm 1° și 2° pentru  $g_{a'}$ :  $g_{a'}(0) = g_a(0) + 0 = 0$ ;  $g_{a'}(b') = g_a(b') + b' = g_a(b) + b + 1 = g_{a'}(b) + 1$ . Urmează că  $a'$  aparține mulțimii  $M$ , deci  $M$  coincide cu  $\mathbb{N}$ . Existența lui  $g_a$  este asigurată. Să arătăm că pentru fiecare număr natural  $a$ ,  $g_a$  este unică. Să presupunem prin absurd că există măcar un număr natural  $b$  și două funcții  $g_b$  și  $\psi_b$ , distincte, de la  $\mathbb{N}$  la  $\mathbb{N}$ , avînd proprietățile 1° și 2°. Fie  $\tilde{M}$  mulțimea numerelor naturale  $x$  pentru care  $g_b(x) = \psi_b(x)$ . Din 1°,  $g_b(0) = 0 = \psi_b(0)$ , deci 0 este în  $\tilde{M}$ . Dacă  $x$  aparține mulțimii  $\tilde{M}$ , atunci  $g_b(x') = g_b(x) + b = \psi_b(x) + b = \psi_b(x')$ . Urmează că  $x'$  aparține lui  $\tilde{M}$ , deci  $\tilde{M} = \mathbb{N}$ . Așadar  $g_b = \psi_b$  contrar presupunerii făcute, q.e.d.

Existența și unicitatea funcției  $g_a$  ne permite să dăm următoarea definiție:

**Definiția 3.2.** Se numește înmulțirea numerelor naturale, aplicația  $\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , dată de  $\cdot: (a, b) \rightarrow a \cdot b = g_a(b)$ .

**Teorema 3.5.** Operația de înmulțire a numerelor naturale are proprietățile:

1°  $a \cdot 0 = 0$ , pentru orice  $a$  din  $\mathbb{N}$ .

2°  $a \cdot b' = a \cdot b + a$ , pentru toți  $a$  și  $b$  din  $\mathbb{N}$ .

În adevăr, după definiția 3.2 și teorema 3.4 avem proprietățile enumerate.

Vom mai folosi și notația  $ab$  pentru  $a \cdot b$ .

**Teorema 3.6.** Înmulțirea numerelor naturale are proprietățile:

1°  $(a + b)c = ac + bc$ ;

2°  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ;

3°  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ;

4°  $ab = ba$ ;

5°  $(ab)c = a(bc)$ ;

6°  $ab = ac$ ,  $a \neq 0$  implică  $b = c$ ;

7°  $ab = 0$ , implică  $a = 0$  sau  $b = 0$ .

**Demonstrație.** Prin inducție, ținînd seama că 2° din teorema 3.5 este  $ab' = a(b + 1) = ab + a$ , se demonstrează fiecare dintre aceste proprietăți. Verificăm de exemplu 4°. Dacă  $b = 0$ , egalitatea este verificată după 2°. Fie  $ab = ba$ . Atunci  $ab' = ab + a = ba + a = (b + 1)a = b'a$ , q.e.d.

Din teoremele 3.3 și 3.6 rezultă:

**Teorema 3.7.** Tripletul  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$  este un semidomeniu de integritate.

#### § 4. RELAȚIA DE ORDINE PE MULȚIMEA $\mathbb{N}$ A NUMERELOR NATURALE

**Definiția 4.1.** Spunem că numărul natural  $a$  este mai mic decît numărul natural  $b$  și scriem  $a < b$  dacă există un număr natural nenul  $c$  încît  $b = a + c$ . Notăm  $a \leq b$  dacă  $a < b$  sau  $a = b$ . Evident,  $\leq$  este relație binară pe  $\mathbb{N}$  și:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}, b = a + c.$$

**Teorema 4.1.** Dacă  $a \leq b$  există un singur număr natural  $c$  încît  $b = a + c$ .

**Demonstrație.** Existența lui  $c$  este asigurată direct de definiția 4.1. Dacă există și  $d$  în  $\mathbb{N}$  încît  $b = a + d$ , urmează  $a + c = a + d$  și, conform 5° din teorema 3.3, rezultă  $c = d$ , q.e.d.

**Teorema 4.2.** Mulțimea  $(\mathbb{N}, \leq)$  este total ordonată. Structura de ordine este compatibilă cu adunarea și înmulțirea numerelor naturale.

**Demonstrație**  $a \leq a$ , în baza definiției 4.1. Dacă  $a \leq b$  și  $b \leq a$ , atunci  $a = b$ ; în caz contrar  $a < b$ ,  $b < a$  implică, după teorema 4.1,  $a + c = b$ ,  $b + d = a$ . Aceste egalități ne duc la  $b + d + c = b$ , adică  $d + c = 0$ ,  $d = 0$ ,  $c = 0$ , contrar ipotezei. Acum, din  $a \leq b$ ,  $b \leq c$  se deduce ușor, în baza teoremei 4.1,  $a \leq c$ .

Vom dovedi acum că  $(\mathbb{N}, \leq)$  este total ordonată. Pentru numărul natural  $a$  considerăm mulțimea  $M_a = \{x: a \leq x \text{ sau } x \leq a\}$ . Se impune deci să constatăm  $M_a = \mathbb{N}$ . Evident,  $0 \leq a$ , deci  $0 \in M_a$ .

Fie  $x \in M_a$ . În eventualitatea  $a \leq x$  urmează imediat  $a \leq x'$ , deci  $x' \in M_a$ . În cealaltă eventualitate,  $x \leq a$ , există  $n$  încît  $x + n = a$ . Discernem alternativa  $n = 0$  sau  $n \neq 0$ . Pentru  $n = 0$  urmează  $x = a$  și  $x' = a' = a + 0'$ , deci  $a \leq x'$  ce implică din nou  $x' \in M_a$ . Dacă  $n \neq 0$ , conform propoziției 3.3, găsim  $m$  încît  $n = m'$  și deducem  $a = x + m' = x' + m$ , deci  $x' \leq a$  și din nou  $x' \in M_a$ . În toate eventualitățile, din  $x \in M_a$  a urmat  $x' \in M_a$ ; conform principiului inducției  $M_a = \mathbb{N}$ .



Constatăm apoi

$a < b, c \leq d$  implică  $a + c < b + d$  și  $a < b, 0 \neq c$  implică  $ac < bc$ .

În adevăr,  $a + a_1 = b, a_1 \neq 0, c + c_1 = d$  implică  $a + c + (a_1 + c_1) = b + d, a_1 + c_1 \neq 0$ . Deci  $a + c < b + d$ . Apoi, din  $a + a_1 = b, a_1 \neq 0, 0 \neq c$  avem  $ac + a_1c = bc, a_1c \neq 0$ , care ne dă  $ac < bc$ , q.e.d.

**Teorema 4.3.** *Mulțimea  $(N, \leq)$  este bine ordonată.*

*Demonstrație.* Fie  $M$  o submulțime oarecare nevidă a lui  $N$ . Ne propunem să demonstrăm că  $M$  are un prim element. Fie  $\tilde{M}$  mulțimea tuturor numerelor naturale  $a$  cu proprietatea  $a \leq m$  pentru orice  $m$  din  $M$ .  $N - \tilde{M} \neq \emptyset$  deoarece pentru  $m$  în  $M$  nu are loc  $m' \in \tilde{M}$ . Cum  $0 \leq m$ , rezultă că  $0$  aparține lui  $\tilde{M}$ . Evident există un număr natural  $m_0$  în  $\tilde{M}$  pentru care succesorul său,  $m'_0$ , nu este în  $\tilde{M}$ . Cum  $m_0$  aparține lui  $\tilde{M}$ ,  $m_0 \leq m$  pentru orice  $m$  din  $M$ . Dacă am avea numai  $m_0 < m$ , atunci  $m'_0 \leq m$  pentru orice  $m$  din  $M$  și atunci  $m'_0 \in \tilde{M}$  contrar ipotezei. Deci  $m_0 \in M$  și atunci  $m_0$  este primul element al lui  $M$ , q.e.d.

*Observație.* Teorema precedentă este consecința imediată a teoremei 4.2 din cap. I.

Restul rezultatelor privind mulțimea  $N$  a numerelor naturale, date în capitolul II, pot fi reluate acum fără modificări.

## § 5. ANALIZA METATEORETICĂ A SISTEMULUI AXIOMATIC AL NUMERELOR NATURALE

Pentru sistemul axiomatic al lui Peano vom discuta acum problemele necontradicției, independenței și categoricității sale. Cum sistemul este semiformalizat, ne vom ocupa numai de partea lui specifică.

Se vede fără dificultate că teoria Frege-Russell a numerelor naturale, expusă în capitolul II, este un model pentru axiomaticele lui Peano. Atunci aceasta din urmă este necontradictorie dacă teoria Frege-Russell este necontradictorie. La rîndul ei această teorie este necontradictorie dacă teoria mulțimilor folosită în construcția ei este necontradictorie. Dar este mai greu să justificăm necontradicția teoriei mulțimilor, decît să acceptăm direct că aritmetica, bazată pe teoria lui Peano, este necontradictorie. În consecință vom admite că axiomaticele lui Peano nu este contradictorie. În felul acesta ea

devine o teorie de bază și servește la construcția unor modele aritmetice pentru alte teorii. Buzuindu-ne pe această ipoteză putem afirma că înmulțirea  $Z$  și cîmpurile  $Q, R, C$ , construite pornind de la mulțimea numerelor naturale, sînt necontradictorii. Pentru teoriile axiomatice pe care le vom considera vom construi efectiv modele aritmetice pentru a proba necontradicția lor.

## INDEPENDENȚA AXIOMATICEI LUI PEANO

Axioma  $A_1$  se consideră independentă de celelalte, deoarece fără ea nu putem formula axiomele  $A_3$  și  $A_5$ .

Pentru a dovedi independența axiomei  $A_2$  de celelalte axiome din sistem să considerăm mulțimea  $\{0, 1, 2, 3\}$  drept mulțimea numerelor naturale și relația de succesiune dată de săgețile:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3.$$

Atunci  $0$  aparține mulțimii considerate, deci  $A_1$  este verificată.  $A_2$  nu se realizează pe acest model, deoarece  $3$  nu are succesor. Axioamele  $A_3, A_4, A_5$  sînt evident satisfăcute. După propoziția 2.1, rezultă  $A_2$  independentă de celelalte axiome.

Să considerăm apoi mulțimea  $\{0, 1, 2\}$  drept mulțime a numerelor naturale și relația de succesiune dată de săgețile

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

Sînt satisfăcute pe acest model axiomele  $A_1, A_2, A_4, A_5$  dar nu este satisfăcută axioma  $A_3$ . Deci  $A_3$  este independentă de celelalte axiome.

Considerăm drept mulțime a numerelor naturale pe  $\{0, 2\}$  și drept relație de succesiune pe  $0' = 2, 2' = 0$ . Pe acest model sînt verificate toate axiomele exceptînd  $A_4$ , ceea ce probează independența acesteia de restul axiomelor.

În fine, fie mulțimea  $\{0, 2, 4, \dots, 1, 3, \dots\}$  drept mulțime a numerelor naturale și relația de succesiune dată de săgețile

$$0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

Pe acest model axiomele  $A_1 - A_4$  sînt verificate. Axioma  $A_5$  nu are loc.

În adevăr, mulțimea  $M$  a numerelor „pare” satisface ipotezele din  $A_5$  dar nu coincide cu  $N$ . Am constatat deci:



**Teorema 5.2.** *Axiomele din sistemul axiomatic al lui Peano sînt independente.*

*Completitudinea sistemului axiomatic al lui Peano decurge din următoarea :*

**Teorema 5.3.** (Dedekind). *Aritmetica semiformalizată a lui Peano este o teorie categorică.*

*Demonstrație.* Fie  $N_1$  și  $N_2$  două modele pe care se realizează toate axiomele sistemului lui Peano și fie  $0_1$  și  $0_2$  elementele care dau pe zero în fiecare dintre aceste modele. Notăm cu accent succesiunea în modelele  $N_1$  și  $N_2$  ca interpretînd succesiunea din sistemul lui Peano.

Vom considera o aplicație  $k: M_1 \rightarrow M_2$  unde :

$$M_1 \subset N_1, M_2 \subset N_2, k(0_1) = 0_2 \text{ și } k(a') = [k(a)]'.$$

Prin inducție completă în  $(N_i, 0_i, ')$  se constată  $M_i = N_i$  pentru  $i = 1, 2$ . Se mai constată apoi că aplicația  $h: M_2 \rightarrow M_1$  definită prin  $h(0_2) = 0_1, h(b') = [h(b)]'$  este inversa aplicației  $k$  și deducem astfel existența izomorfismului  $k: (N_1, 0_1, ') \rightarrow (N_2, 0_2, ')$ .

**Corolarul 5.1.** *Sistemul axiomatic al lui Peano este complet.*

*Observație.* Aritmetica semiformalizată poate fi definită ca teoria axiomatică a următoarei structuri matematice. Fie  $N$  o mulțime în care s-a fixat un element, notat cu  $0$ , și numit element zero. Pe  $N$  este definită o funcție  $f: N \rightarrow N, f(a) = a'$ , numită funcție de succesiune; se cere să fie verificate axiomele  $A_1 - A_5$  ale lui Peano.

Noțiunea de geometrie elementară nu este prea lesne de definit. Prezentarea ei ca teorie axiomatică este dificilă deoarece sînt necesare multe elemente primare, relații primare și axiome. În genere lucrurile se simplifică dacă mulțimea  $\mathbf{R}$  a numerelor reale este cunoscută. Geometria poate fi prezentată atunci ca o structură matematică definită de o mulțime de elemente, numite puncte, o relație de echivalență pe mulțimea perechilor de puncte care permite să definim vectorii și o înmulțire a numerelor reale cu vectorii, supuse la un număr (relativ mic) de axiome. Pentru a face această construcție va trebui să cunoaștem cîteva structuri algebrice simple. Deoarece avem în vedere teorii axiomatiche necontradictorii și minimale nu neapărat complete, le vom expune pe rînd, în formă generală.

### § 1. SPAȚIU APROAPE LINIAR

Fie  $\mathbf{R}$  cîmpul numerelor reale studiat în capitolul II.

**Definiția 1.1.** Se numește *spațiu aproape liniar* (real, sau peste cîmpul  $\mathbf{R}$ ), o mulțime nevidă  $M$ , în care s-a fixat un element  $0 \in M$  împreună cu o operație internă  $+: M \times M \rightarrow M$  și cu o operație externă față de  $\mathbf{R}, *: \mathbf{R} \times M \rightarrow M$ , încît sînt verificate axiomele :

$$1^\circ \forall x, y, z \in M, x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$2^\circ \forall x \in M, x + 0 = x;$$

$$3^\circ \forall x \in M, \exists (-x) \in M, x + (-x) = 0;$$

$$4^\circ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x, y \in M, \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y;$$

$$5^\circ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in M, (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x;$$

$$6^\circ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in M, \alpha * (\beta * x) = (\alpha \cdot \beta) * x.$$

*Observație.* Cum se vede, în noțiunea de spațiu aproape liniar, introdusă de unul dintre autori, [67], s-au reținut numai o parte dintre axiomele spațiilor liniare.



Elementele lui  $M$  vor fi numite *vectori*, iar cele ale lui  $R$  *scalari* sau, pur și simplu, numere reale.

Din definiția dată rezultă că noțiunea de spațiu aproape liniar se prezintă ca o structură matematică. Putem demonstra:

**Teorema 1.1.** *Sistemul de axiome al noțiunii de spațiu aproape liniar este necontradictoriu.*

*Demonstrație.* Orice spațiu liniar real este un model pentru sistemul considerat. În particular  $M = R$ , împreună cu operația obișnuită  $+$ , în care  $\alpha * x = \alpha \cdot x$ ,  $\forall \alpha, x \in R$  satisface axiomele  $1^\circ - 6^\circ$ , q.e.d.

**Teorema 1.2.** *Sistemul de axiome al noțiunii de spațiu aproape liniar este minimal.*

*Demonstrație.* Modelul 1. Se ia  $M = \{0, a, b\}$  cu operația  $+$ , dată de

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $+$ | $0$ | $a$ | $b$ |
| $0$ | $0$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $0$ |
| $b$ | $b$ | $0$ | $b$ |

și  $\alpha * x = x$ ,  $\forall \alpha \in R$  și  $\forall x \in M$ . Axioma  $1^\circ$  nu este verificată, deoarece  $(a + a) + b = a + b = 0 \neq a + 0 = a + (a + b)$ . Celelalte axiome sînt satisfăcute.

După propoziția 2.1, cap. III, rezultă independența axiomei  $A_1$  de celelalte.

Modelul 2.  $M = R$ ;  $x + y = y$  pentru orice  $x, y \in M$ ,  $\alpha * x = x$ .

Modelul 3.  $M = R$ ;  $x + y = x$ ,  $\alpha * x = x$ .

Modelul 4.  $M = R \times R$ ;  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ;

$$\alpha * (x_1, x_2) = \begin{cases} (0, \alpha x_2), & \text{dacă } x_2 \neq 0, \\ (\alpha x_1, 0), & \text{dacă } x_2 = 0. \end{cases}$$

Axioma  $4^\circ$  nu este verificată pentru că  $1 * [(1, 0) + (0, 1)] = 1 * (1, 1) = (0, 1) \neq (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) = 1 * (1, 0) + 1 * (0, 1)$ .

Modelul 5.  $M = R$ ;  $x + y$  adunarea din  $R$  și  $\alpha * x = x$ ,  $\forall \alpha \in R$ .

Modelul 6.  $M = R \times R$ ;  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ;

$\alpha * (x_1, x_2) = (\alpha x_2, \alpha x_1)$ . Este clar că în acest model axiomele  $1^\circ - 5^\circ$  sînt verificate în timp ce  $6^\circ$  nu este.

*Observație.* Sistemul de axiome considerat nu este complet, deoarece i se pot adăuga axiome noi, independente de axiomele  $1^\circ - 6^\circ$ .

**Propoziția 1.1.** *Avem*

$$1^\circ x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in M \text{ și}$$

$$2^\circ x + (-x) = (-x) + x = 0, \forall x \in M.$$

În adevăr,  $(M, +)$  fiind un grup au loc  $1^\circ$  și  $2^\circ$ .

**Propoziția 1.2.**  $1^\circ \alpha * (x - y) = \alpha * x - \alpha * y$ ;  $2^\circ \alpha * 0 = 0$ ;  
 $3^\circ \alpha * (-x) = -\alpha * x$ .

În adevăr,  $\alpha * [(x - y) + y] = \alpha * x = \alpha * (x - y) + \alpha * y$ , care implică  $1^\circ$ ;  $2^\circ$  și  $3^\circ$  sînt consecințe ale lui  $1^\circ$ .

**Propoziția 1.3.**  $1^\circ (\alpha - \beta) * x = \alpha * x - \beta * x$ ;

$$2^\circ 0 * x = 0$$
;

$$3^\circ (-\alpha) * x = -\alpha * x.$$

Pentru a dovedi  $1^\circ$  să observăm că  $\alpha * x = [(\alpha - \beta) + \beta] * x = (\alpha - \beta) * x + \beta * x$ , care ne dă  $1^\circ$ . Celelalte două egalități se obțin particularizînd  $1^\circ$ .

**Teorema 1.3.** *Oricare ar fi  $\alpha, \beta \in R$  și  $x, y \in M$ , avem*

$$(1.1) \quad \alpha * x + \beta * y = \beta * y + \alpha * x.$$

*Demonstrație.*  $(\alpha + \beta) * (x + y) = \alpha * (x + y) + \beta * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y + \beta * x + \beta * y = (\alpha + \beta) * x + (\alpha + \beta) * y = \alpha * x + \beta * x + \alpha * y + \beta * y$ . Însă  $\alpha * x + \alpha * x + \beta * y + \beta * y = \alpha * x + \beta * y + \alpha * x + \beta * y$  implică (1.1), q.e.d.

**Propoziția 1.4.** *Dacă aplicația  $*$ :  $R \times M \rightarrow M$  este surjectivă, atunci adunarea vectorilor este comutativă:*

$$x + y = y + x, \forall x, y \in M.$$

În adevăr, presupunînd că  $*$ :  $R \times M \rightarrow M$  este surjectivă, fie  $x$  și  $y$  două elemente oarecare din  $M$ . Există atunci scalarii  $\alpha, \beta \in R$  și vectorii  $x_1, y_1$  din  $M$  așa ca  $x = \alpha * x_1$ ,  $y = \beta * y_1$ . După (1.1)  $x + y = \alpha * x_1 + \beta * y_1 = \beta * y_1 + \alpha * x_1 = y + x$ , q.e.d.

Noțiunea de *subspațiu aproape liniar* se definește în mod obișnuit: o submulțime nevidă  $M_1 \subset M$ , care împreună cu restricțiile aplicațiilor  $+$  și  $*$  este un spațiu aproape liniar se numește subspațiu aproape liniar în  $M$ .



**Teorema 1.4.** O submulțime nevidă  $M_1 \subset M$  este subspațiu aproape liniar dacă și numai dacă :

- 1°  $x - y \in M_1, \forall x, y \in M_1$  și  
2°  $\alpha * x \in M_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in M_1$ .

În adevăr, condiția 1° afirmă că  $(M_1, +)$  este subgrup al grupului  $(M, +)$ . Din 2° rezultă, pentru  $(M_1, +, *)$ , verificate celelalte axiome de spațiu aproape liniar. Afirmatia reciprocă este imediată.

**Definiția 1.2.** Numim morfism de la spațiul aproape liniar  $(M, +, *)$  la spațiul aproape liniar  $(P, \oplus, \otimes)$  o aplicație  $f: M \rightarrow P$  ce satisface condițiile

- 1°  $\forall x, y \in M, f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$  și  
2°  $\forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R} f(\alpha * x) = \alpha \otimes f(x)$ .

Morfismul  $f$  se mai numește *injectiv* sau *surjectiv* dacă aplicația  $f$  are această calitate; dacă aplicația  $f$  este biunivocă se spune că  $f$  este *izomorfism*.

**Propoziția 1.4.** Dacă  $f$  este un morfism de la spațiul aproape liniar  $(M, +, *)$  la spațiul aproape liniar  $(P, \oplus, \otimes)$ , atunci :

- 1°  $\text{Ker } f = \{x : x \in M \text{ și } f(x) = 0_P\}$  este subspațiu aproape liniar în  $(M, +, *)$  (numit nucleul morfismului  $f$ );  
2°  $\text{Im } f = \{f(x) : x \in M\}$  este subspațiu aproape liniar în  $(P, \oplus, \otimes)$  (numit imaginea morfismului  $f$ ).

**Teorema 1.5.** Dacă  $(M, +, *)$  este spațiu aproape liniar și  $f: M \rightarrow M$  este definită prin  $f(x) = 1 * x$ , atunci :

- 1°  $f$  este morfism al spațiului aproape liniar  $(M, +, *)$  în el însuși;  
2°  $\text{Ker } f$  este un subspațiu aproape liniar în  $M$  (notat prin  $M_0$ );  
3°  $(M_0, +)$  este divizor normal în grupul  $(M, +)$ ;

4°  $\text{Im } f$  este un subspațiu aproape liniar în  $M$  (notat cu  $M_1$ ) ce satisface condițiile suplimentare

$$(1.2) \quad \begin{cases} \forall x, y \in M_1, x + y = y + x \text{ și} \\ \forall x \in M_1, 1 * x = x. \end{cases}$$

**Demonstrație.** 1°  $f(x + y) = 1 * (x + y) = 1 * x + 1 * y = f(x) + f(y)$ ;  $f(\alpha * x) = 1 * (\alpha * x) = \alpha * (1 * x) = \alpha * f(x)$ .

2° Este consecință a propoziției 1.4.

3° Să observăm acum că  $\forall x \in M_0, \forall y \in M$  avem  $-y + x + y \in M_0$ . În adevăr,  $f(-y + x + y) = -1 * y + 1 * x + 1 * y = -1 * y + 1 * x + 1 * y = -1 * y + 1 * y = 0$ .

4° Urmează din propoziția 1.4.

Aplicind apoi teorema 1.3, pentru  $\alpha = \beta = 1$ , avem  $x + y = 1 * x_1 + 1 * y_1 = 1 * y_1 + 1 * x_1 = y + x$ . În fine  $1 * x = 1 * (1 * x_1) = (1 \cdot 1) * x_1 = 1 * x_1 = x$ , q.e.d.

**Observație.**  $M_1$  are structură de spațiu aproape liniar pentru care sînt verificate (1.2), deci  $(M_1, +, *)$  este un *spațiu liniar*. În paragraful următor vom defini noțiunea de spațiu liniar prin axiome independente.

Deoarece  $(M_0, +)$  este divizor normal în  $M$  și avem în plus  $\alpha * x = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in M_0$ , putem considera mulțimea factor

$$(1.3) \quad M/M_0 = \{x + M_0 : x \in M\}.$$

Vom pune  $\hat{x} = x + M_0$ . În această mulțime definim

$$(1.4) \quad \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}, \alpha * \hat{x} = \widehat{\alpha * x}.$$

Se constată că membrii secunzi nu depind de alegerea reprezentanților lui  $\hat{x}$  și  $\hat{y}$  deci  $+$  și  $*$  sînt operații în  $M/M_0$  (prima internă, a doua externă).

Are loc următoarea teoremă de structură, dată de R. Miron în [67]:

**Teorema 1.6.** 1° Spațiul aproape liniar  $M$  este suma semidirectă a subspațiilor aproape liniare  $M_0$  și  $M_1$ :  $M = M_1 \oplus M_0$ . 2°  $M_1$  este spațiu aproape liniar izomorf cu  $M/M_0$ .

**Demonstrație.** 1° Pentru că  $(M_0, +)$  este divizor normal în  $(M, +)$ , avem de arătat numai că  $M_0 \cap M_1 = \{0\}$  și că  $M = M_0 + M_1$ . În adevăr, dacă  $x \in M_0 \cap M_1$ , atunci  $1 * x = 0, x = 1 * x_1$ . Înmulțind cu doua relație cu scalarul 1, avem  $0 = 1 * x = 1 * (1 * x_1) = (1 \cdot 1) * x_1 = 1 * x_1 = x$ , deci  $x = 0$ . Fie acum  $y$  un element oarecare din  $M$ . Putem scrie

$$y = (y - 1 * y) + 1 * y = y_0 + y_1; y_0 = y - 1 * y, y_1 = 1 * y$$



Dar  $y_0 \in M_0$  și  $y_1 \in M_1$  pentru că  $f(y_0) = 1 * y_0 = 1 * (y - 1 * y) = 1 * y - 1 * (1 * y) = 1 * y - 1 * y = 0$  și  $1 * y_1 = 1 * (1 * y) = 1 * y = y_1$ . În consecință  $M$  este sumă semidirectă a lui  $M_0$  și  $M_1$ .

2° Aplicația  $F: M/M_0 \rightarrow M$ , dată de  $F(\hat{x}) = f(x) = 1 * x$  este un izomorfism, q.e.d.

**Observații.** 1°  $M_1$  fiind spațiu liniar (peste  $\mathbf{R}$ ),  $M/M_0$  are aceeași proprietate.

2° Suma semidirectă  $M = M_0 \oplus M_1$  permite să scriem în mod unic orice element  $x \in M$  sub forma  $x = x_0 + x_1$ ,  $x_0 \in M_0$ ,  $x_1 \in M_1$ .

**Corolarul 1.1.** (Liebeck, [54]). Dacă  $(M, +)$  este grup comutativ și  $(M, +, *)$  este un spațiu aproape liniar, atunci are loc descompunerea în sumă directă:  $M = M_0 \oplus M_1$ .

În adevăr, în acest caz  $(M_0, +)$  și  $(M_1, +)$  sînt divizori normali în  $(M, +)$  și 1° din teorema precedentă ne dă rezultatul enunțat. Un procedeu de construcție a unui spațiu aproape liniar  $M$ , cînd subspațiile  $M_0$  și  $M_1$  sînt date a fost indicat de prof. Fr. Radó de la Universitatea din Cluj-Napoca [82]. Enunțăm rezultatul pentru cazul cînd scalarii sînt din corpul  $\mathbf{R}$ .

**Teorema 1.7.** Fie  $M_0$  un spațiu aproape liniar (peste  $\mathbf{R}$ ), avînd proprietatea  $1 * x = 0$ ,  $\forall x \in M_0$  și  $M'$  un spațiu liniar (peste  $\mathbf{R}$ ). În aceste condiții există pînă la izomorfisme un singur spațiu aproape liniar  $M$  (peste  $\mathbf{R}$ ) încît subspațiile sale  $M_0$  și  $M_1$  din  $M = M_0 \oplus M_1$  sînt izomorfe cu  $M_0$ , respectiv cu  $M_1$ .

Un ultim rezultat care interesează în geometria spațiilor aproape afine este dat de:

**Teorema 1.8.** Dacă  $f: M \rightarrow M'$  este un morfism de spații aproape liniare (peste  $\mathbf{R}$ ), atunci există un singur morfism  $F: M/M_0 \rightarrow M'/M'_0$ , încît următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M/M_0 & \xrightarrow{F} & M'/M'_0 \end{array}$$

$\pi$  și  $\pi'$  fiind proiecțiile canonice.

**Demonstrație.** Fie  $F(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$ . Dacă  $x$  și  $x'$  sînt din  $\hat{x}$ , atunci  $x - x' \in M_0$ . Dar  $1 * (x - x') = 0 \Rightarrow 1 * f(x - x') = 0 \Rightarrow f(x) - f(x') \in M'_0$  sau  $\widehat{f(x)} = \widehat{f(x')}$ . Prin urmare  $F(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$  depinde de

$\hat{x}$  și nu de  $x$ . Avem atunci  $F(\hat{x} + \hat{y}) = \widehat{F(x + y)} = \widehat{f(x + y)} = \widehat{f(x) + f(y)} = \widehat{f(x)} + \widehat{f(y)} = F(\hat{x}) + F(\hat{y})$ . Apoi  $F(\alpha * \hat{x}) = \widehat{F(\alpha * x)} = \widehat{f(\alpha * x)} = \widehat{\alpha * f(x)} = \alpha * \widehat{f(x)} = \alpha * F(\hat{x})$ . Dar  $\hat{x} = \pi(x)$ ,  $\widehat{f(x)} = \pi'(f(x))$ . Deci  $F(\hat{x}) = (F \circ \pi)(x) = (\pi' \circ f)(x)$ ,  $\forall x \in M$ . Așadar  $F \circ \pi = \pi' \circ f$ . Deci diagrama anunțată este comutativă. Unicitatea morfismului  $F$  se justifică prin reducere la absurd. Presupunînd că avem  $F' \neq F$  și  $F' \circ \pi = \pi' \circ f$ , atunci avem  $F' \circ \pi = F \circ \pi$  și cum  $\pi$  este surjecție:  $F' = F$ , în contradicție cu ipoteza, q.e.d.

**Observație.** Toate noțiunile expuse în acest paragraf pot fi reluate punct cu punct, înlocuind cîmpul  $\mathbf{R}$  cu un inel cu unitate oarecare.

## § 2. SPAȚIU LINIAR REAL

Noțiunea de spațiu liniar, întîlnită frecvent, este definită în mod obișnuit cu ajutorul unui sistem de axiome, care nu este minimal. Din acest motiv vom modifica sistemul cunoscut, renunțînd la axioma de comutativitate a adunării vectorilor și slăbind axioma  $1 * x = x$ .

**Definiția 2.1.** Se numește *spațiu liniar* (real, sau peste  $\mathbf{R}$ ), un spațiu aproape liniar  $M$  (peste  $\mathbf{R}$ ), în care este verificată axioma: 7°  $\forall x \neq 0$ ,  $1 * x \neq 0$ .

Așadar, într-un spațiu liniar (peste  $\mathbf{R}$ ) sînt verificate axiomele 1°–6° din definiția 1.1 și axioma 7°.

**Teorema 2.1.** Sistemul de axiome 1°–7°, al noțiunii de spațiu liniar, este necontradictoriu.

În adevăr, pentru  $M = \mathbf{R}$ , în care  $+$  este adunarea numerelor reale și  $\alpha * x = \alpha \cdot x$  este produsul din  $\mathbf{R}$  sînt verificate toate axiomele 1°–7°.

**Teorema 2.2.** Sistemul de axiome 1°–7° al noțiunii de spațiu liniar este minimal.

**Demonstrație.** Se constată ușor că modelele date în demonstrarea independenței axiomei 1°–6°, din teorema 1.2, rămîn valabile și în cazul de față. Cu ajutorul lor probăm, pe rînd, independența primelor șase axiome din sistemul 1°–7°. Cît privește independența ultimei axiome este probată pe următorul model: Fie  $M = \mathbf{R}$  și  $+$  adunarea obișnuită a numerelor reale. Definim  $\alpha * x = 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Axiomele 1°–6° sînt verificate în timp ce 7° nu este verificată pe acest model. Deci 7° este independentă de celelalte axiome, q.e.d.



Așa cum am anunțat, sistemul  $1^\circ-7^\circ$  de axiome, al unui spațiu liniar, nu cuprinde axioma  $x + y = y + x$ , iar axioma  $1 * x = x$  este dată într-o formă mai slabă în  $7^\circ$ .

**Teorema 2.3.** În orice spațiu liniar  $M$ , peste  $\mathbf{R}$ , au loc proprietățile:

$$(2.1) \quad \begin{cases} 1 * x = x, & \forall x \in M; \\ x + y = y + x, & \forall x, y \in M. \end{cases}$$

**Demonstrație.** Din  $1 * (x - 1 * x) = 1 * x - (1 \cdot 1) * x = 1 * x - 1 * x = 0$  și cu axioma  $7^\circ$  rezultă  $x - 1 * x = 0$ , deci  $x = 1 * x$ ,  $\forall x \in M$ . Apoi, prima egalitate (2.1) arată că aplicația  $*$ :  $\mathbf{R} \times M \rightarrow M$  este surjectivă. După propoziția 1.4, avem  $x + y = y + x$ , q.e.d.

**Observație.** Într-un spațiu liniar  $M$   $1 * x = 0 \Rightarrow x = 0$ . Urmează că subspațiul aproape liniar  $M_0$  este format numai din vectorul  $0$  iar subspațiul liniar  $M_1$  coincide cu  $M$ .

Propozițiile 1.1, 1.2 și 1.3 se aplică. Noțiunea de subspațiu aproape liniar conduce aici la cea de subspațiu liniar. Teorema 1.4 rămâne adevărată. Noțiunea de morfism își păstrează sensul și pentru spațiile liniare. În acest caz un morfism de spații liniare se numește și *transformare liniară* sau *aplicație liniară*.

Sînt cunoscute noțiunile de combinație liniară, dependență și independență liniară a vectorilor și de dimensiune a unui spațiu liniar; nu le mai redăm aici.

**Definiția 2.2.** Un spațiu liniar (real)  $M$  se numește *spațiu liniar euclidian*, dacă este dată o aplicație de la  $M \times M$  la  $\mathbf{R}$ , numită produs scalar și notată prin  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  astfel încît sînt verificate axiomele:

- 1'.  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ,  $\forall x, y, z \in M$ ;
- 2'.  $(\alpha * x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\forall x, y \in M$ ;
- 3'.  $x \cdot y = y \cdot x$ ,  $\forall x, y \in M$ ;
- 4'.  $\forall x \neq 0$ ,  $x^2 = x \cdot x > 0$

Necontradicția sistemului de axiome  $1^\circ-7^\circ$ ,  $1'-4'$  se dovedește prin existența următorului model:

Fie  $M = \mathbf{R}^n$ , cu  $x + y = (x^i) + (y^i) = (x^i + y^i)$ ,  $\alpha * x = \alpha * (x^i) = (\alpha \cdot x^i)$ . Sînt verificate axiomele  $1^\circ-7^\circ$ . Fie acum  $x = (x^i)$ ,  $y = (y^i)$ ; vom defini produsul lor scalar prin

$$x \cdot y = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n$$

Axiomele 1', 2', 3', 4' se verifică ușor. Prin urmare:

**Teorema 2.4.** Sistemul de axiome  $1^\circ-7^\circ$ ,  $1'-4'$ , al noțiunii de spațiu liniar euclidian este necontradictoriu.

Se demonstrează fără dificultăți majore că axiomele  $1'-4'$  sînt independente în sistemul  $1^\circ-7^\circ$ ,  $1'-4'$  deci sistemul complet de axiome al spațiilor liniare euclidiene dat mai sus este minimal.

**Propoziția 2.1.** Produsul scalar are proprietățile:

$$1^\circ \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0;$$

$$2^\circ \quad x^2 = x \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$3^\circ \quad (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y.$$

Demonstrațiile sînt elementare.

Să mai observăm că

$$\left( \sum_{k=1}^n \alpha^k * x_k \right) \cdot \left( \sum_{h=1}^p \beta^h * y_h \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^p \alpha^k \beta^h (x_k \cdot y_h)$$

În particular:

$$(2.2) \quad (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$$

**Definiția 2.3.** Se numește *lungimea* (sau *norma*) unui vector  $x$  numărul real nenegativ, notat  $\|x\|$ :

$$(2.3) \quad \|x\| = \sqrt{x^2}.$$

**Propoziția 2.2.** Avem:

$$1^\circ \quad \|x\|^2 = x^2, \quad \forall x \in M;$$

$$2^\circ \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = \vec{0};$$

$$3^\circ \quad \|\alpha * x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in M;$$

$$4^\circ \quad \|-x\| = \|x\|, \quad \forall x \in M;$$

În adevăr,  $1^\circ$  este echivalența cu (2.3),  $2^\circ$  este consecința propoziției 2.1, iar pentru  $3^\circ$  observăm  $\|\alpha * x\|^2 = V(\alpha * x)^2 = V\alpha^2 x^2 = |\alpha|^2 x^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2$ .  $4^\circ$  este consecința  $\|(-1) * x\| = \|x\|$ .

**Propoziția 2.3.** Pentru doi vectori  $x$  și  $y$  din  $M$  are loc inegalitatea lui Cauchy-Schwarz:

$$(2.4) \quad |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Se dovedește că dacă  $x$  și  $y$  sînt liniar independenți, atunci  $x \cdot y = 0$ . Din acest fapt rezultă că dacă  $x$  și  $y$  sînt liniar dependenți, atunci există  $\alpha$  și  $\beta$  astfel încît  $\alpha x + \beta y = 0$ . Dacă  $\alpha \neq 0$ , atunci  $x = -\frac{\beta}{\alpha} y$  și  $x$  este paralel cu  $y$ . În acest caz,  $x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \varphi$ , unde  $\varphi$  este unghiul dintre  $x$  și  $y$ . Dacă  $x$  și  $y$  sînt liniar independenți, atunci  $\cos \varphi = 0$  și  $x \cdot y = 0$ .



Se demonstrează fără dificultăți majore că axiomele 1'—4' sînt independente în sistemul 1°—7°, 1'—4' deci sistemul complet de axiome al spațiilor liniare euclidiene dat mai sus este minimal.

**Propoziția 2.1.** *Produsul scalar are proprietățile :*

$$1^\circ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0;$$

$$2^\circ x^2 = x \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$3^\circ (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y.$$

Demonstrațiile sînt elementare.

Să mai observăm că

$$\left( \sum_{k=1}^n \alpha^k * x_k \right) \cdot \left( \sum_{h=1}^p \beta^h * y_h \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^p \alpha^k \beta^h (x_k \cdot y_h).$$

În particular :

$$(2.2) \quad (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$$

**Definiția 2.3.** Se numește *lungimea* (sau *norma*) unui vector  $x$ , numărul real nenegativ, notat  $\|x\|$  :

$$(2.3) \quad \|x\| = \sqrt{x^2}.$$

**Propoziția 2.2.** *Avem :*

$$1^\circ \|x\|^2 = x^2, \forall x \in M;$$

$$2^\circ \|x\| = 0 \Rightarrow x = \vec{0};$$

$$3^\circ \|\alpha * x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in M;$$

$$4^\circ \|-x\| = \|x\|, \forall x \in M;$$

În adevăr, 1° este echivalentă cu (2.3), 2° este consecință a propoziției 2.1, iar pentru 3° observăm  $\|\alpha * x\| = \sqrt{(\alpha * x)^2} = \sqrt{\alpha^2 x^2} = |\alpha| \cdot \sqrt{x^2} = |\alpha| \cdot \|x\|$ . 4°  $\|-x\| = \|(-1) * x\| = \|x\|$ .

**Propoziția 2.3.** *Pentru orice doi vectori  $x$  și  $y$  din  $M$  are loc inegalitatea lui Cauchy-Schwartz :*

$$(2.4) \quad |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$



**Demonstrație.** Din  $(\alpha * x + y)^2 \geq 0$  avem  $\alpha^2 x^2 + 2\alpha x \cdot y + y^2 \geq 0$ . Membrul întâi este trinom de grad doi în variabila  $\alpha$  și discriminantul său trebuie să fie negativ. Atunci  $(x \cdot y)^2 - x^2 y^2 \leq 0$ . Deci  $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , q.e.d.

**Propoziția 2.4.** Pentru orice doi vectori  $x, y$  are loc inegalitatea lui Minkowski :

$$(2.5) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

În adevăr,  $\|x + y\|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2 \leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ . Deci  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Definiția 2.4.** Se numește unghiul a doi vectori nenuli  $x$  și  $y$  din  $M$  numărul real  $\varphi \in [0, \pi]$  al cărui cosinus este dat de

$$(2.6) \quad \cos \varphi = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Cauchy-Schwartz, obținem  $-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq +1$  deci  $\varphi$  există și este unic.

Din (2.6) avem :

$$(2.7) \quad x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi.$$

Egalitatea aceasta se menține și în cazul  $x = 0$  sau  $y = 0$ . Din acest motiv putem da

**Definiția 2.5.** Vom spune că vectorul  $x$  este *ortogonal* vectorului  $y$  dacă  $x = 0$  sau  $y = 0$ , sau  $x \neq 0, y \neq 0$  și  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Se scrie  $x \perp y$ .

**Propoziția 2.5.** 1°  $x \perp y \Rightarrow x \cdot y = 0$ ; 2°  $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ ; 3°  $x \perp y \Rightarrow \alpha * x \perp y$ ; 4°  $0 \perp y, \forall y \in M$ ; 5°  $(x \perp y \text{ și } x \perp z) \Rightarrow x \perp (\alpha * y + \beta * z), \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

Demonstrațiile sînt ușoare.

Un vector  $x$  este *ortogonal unui subspațiu*  $M' \subset M$  dacă  $x$  este ortogonal fiecărui vector din  $M'$ . În cazul cînd  $M'$  este generat de un sistem de vectori  $S$ , atunci  $x$  este ortogonal pe  $M'$  dacă și numai dacă  $x$  este ortogonal pe fiecare vector din  $S$ . Se dovedește ușor :



**Propoziția 2.6.** Într-un spațiu liniar euclidian  $M$  de dimensiune  $n$  există un sistem de  $n$  vectori de lungime 1, perpendiculari doi câte doi. Vectorii unui astfel de sistem dau o bază a lui  $M$  (numită bază ortonormată).

### § 3. SPAȚII APROAPE AFINE REALE

Pentru a expune noțiunea de spațiu euclidian (vezi § 5), servindu-ne de un sistem axiomatic simplu, care să satisfacă cerința de a fi necontradictoriu și minimal, sîntem nevoiți să prezentăm conceptul mai general de spațiu aproape afin. Construcția clasică a spațiilor affine dată de Weyl [101] și modificată de Raşewsky [83] nu este satisfăcătoare, deoarece sistemul axiomatic considerat de ei nu este minimal. Sîntem constrînși să prezentăm o alternativă a acestei axiomatice, distinctă, care să satisfacă condiției de minimalitate (a se vedea lucrările [67—71]). Avantajul mare al unei atari axiomatice a spațiilor affine și apoi a celor euclidiene constă în faptul că ea nu trebuie modificată odată cu dimensiunea, cum este cazul axiomaticei lui Hilbert și aceasta ne dă posibilitatea cercetării spațiilor affine, apoi euclidiene infinit dimensionale.

Fie  $\mathcal{A}$  o mulțime nevidă ale cărei elemente le vom nota cu  $A, B, C, \dots$  și le vom numi *puncte*. Orice element  $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  se numește *segment orientat* sau *bipunct de origine  $A$  și extremitate  $B$* . Îl vom nota cu  $\overline{AB} = (A, B)$ .

Fie  $\rho$  o relație de echivalență pe  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ . Avem deci:

$$\overline{AB} \rho \overline{AB}; \overline{AB} \rho \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \rho \overline{AB}; (\overline{AB} \rho \overline{CD}, \overline{CD} \rho \overline{EF}) \Rightarrow \overline{AB} \rho \overline{EF}.$$

Notăm cu  $T\mathcal{A} = (\mathcal{A} \times \mathcal{A})/\rho$ , mulțime pe care o numim *spațiul vectorilor lui  $\mathcal{A}$  sau spațiul tangent la  $\mathcal{A}$* . Elementele mulțimii cît  $T\mathcal{A}$  s notează cu  $\overline{AB}, \overline{CD}, \dots, x, y, \dots$ . Avem:

$$\overline{AB} = \{\overline{CD} : \overline{CD} \rho \overline{AB}\}.$$

Se spune atunci că  $\overline{AB}$  este vectorul determinat de segmentul orientat  $\overline{AB}$  în raport cu relația de echivalență  $\rho$ .

**Definiția 3.1.** Se numește *spațiu aproape afin* (real sau peste cîmpul  $\mathbf{R}$ ) o mulțime nevidă  $\mathcal{A}$ , împreună cu următoarele date:



1° O relație de echivalență  $\rho$  pe mulțimea segmentelor orientate  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  în raport cu care sînt definiți vectorii din  $\mathcal{A}$ , ca elemente ale mulțimii factor  $T\mathcal{A} = (\mathcal{A} \times \mathcal{A})/\rho$ ;

2° o aplicație  $*$ :  $(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times T\mathcal{A} \rightarrow \alpha * x \in T\mathcal{A}$  încît sînt verificate axiomele din grupele I-a și a II-a expuse în continuare.

Grupa I-a de axiome

$I_1$ .  $\forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in T\mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{A} : \overline{AB} = x$ ;

$I_2$ .  $\forall A, B, A' \in \mathcal{A} : \overline{AB} = \overline{A'B} \Rightarrow A = A'$ ;

$I_3$ .  $\forall A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{A} : (\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'}) \Rightarrow \overline{AC} = \overline{A'C'}$ .

*Observații.* 1° Ultima axiomă este numită de matematicianul polonez Stanislas Golab, [46], „axioma lui Miron-Opaiț”.

2° Este clar că  $\mathcal{A} \neq \emptyset \Rightarrow T\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

Cea mai importantă consecință a axiomelor din grupa I-a este posibilitatea de a defini operația de adunare a vectorilor din  $\mathcal{A}$ . În acest scop prezentăm cîteva rezultate auxiliare.

**Propoziția 3.1.** Pentru orice puncte  $A, A', B, B'$  din  $\mathcal{A}$ :

1°  $\overline{AA} = \overline{A'A'}$ ;

2°  $\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{BA} = \overline{B'A'}$ ;

3°  $\overline{AB} = \overline{AB'} \Rightarrow B = B'$ .

*Demonstrație.* 1°. Prin axioma  $I_1$  asociem punctului  $A'$  și vectorului  $\overline{AA}$  un punct  $B'$  încît  $\overline{A'B'} = \overline{AA}$ . Fie  $\overline{AC}$  arbitrar în  $T\mathcal{A}$ ; conform axiomei  $I_1$  există punctul  $C'$  încît  $\overline{B'C'} = \overline{AC}$ . Din  $\overline{A'B'} = \overline{AA}$  și  $\overline{B'C'} = \overline{AC}$ , cu axioma  $I_3$  urmează  $\overline{A'C'} = \overline{AC}$ . Avînd în vedere că și  $\overline{B'C'} = \overline{AC}$  urmează  $\overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ . Prin axioma  $I_2$  rezultă  $B' = A'$  și egalitatea  $\overline{A'B'} = \overline{AA}$  devine  $\overline{AA} = \overline{A'A'}$ , q.e.d.

2°. Axioma  $I_1$  aplicată vectorului  $\overline{BA}$  și punctului  $B'$  asigură existența unui punct  $C'$  încît  $\overline{B'C'} = \overline{BA}$ . Din premisele  $\overline{A'B'} = \overline{AB}$  și  $\overline{B'C'} = \overline{BA}$ , cu axioma  $I_3$ , deducem  $\overline{A'C'} = \overline{AA}$ . Folosim convenabil egalitatea 1° și ultima egalitate devine  $\overline{A'C'} = \overline{C'C'}$ . Axioma  $I_2$  implică  $C' = A'$  și deci  $\overline{B'A'} = \overline{B'C'} = \overline{BA}$ , q.e.d.

3° Conform 2°,  $\overline{AB} = \overline{AB'} \Rightarrow \overline{BA} = \overline{B'A}$ ; în continuare, axioma  $I_2$  asigură  $B = B'$ , q.e.d.

Conform egalității 1°, vectorul  $\overline{AA}$  nu depinde de punctul  $A$ . Vom spune că  $\overline{AA}$  este vectorul nul din  $\mathcal{A}$  și îl vom nota cu  $0$  (Une-



ori, pentru evitarea unor posibile confuzii, vom evidenția caracterul său de vector notînd  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ). Vectorul  $\overrightarrow{BA}$  depinde doar de vectorul  $\overrightarrow{AB}$ ; se numește *opusul vectorului*  $\overrightarrow{AB}$  și se va nota  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

Fie  $(x, y) \in T\mathcal{A} \times T\mathcal{A}$  și  $A \in \mathcal{A}$ ; atunci există un singur punct  $B \in \mathcal{A}$  și un singur punct  $C$  în  $\mathcal{A}$  așa ca  $x = \overrightarrow{AB}$ ,  $y = \overrightarrow{BC}$ . După axioma  $I_3$ , vectorul  $z = \overrightarrow{AC}$  nu depinde de punctul  $A$ , ci numai de vectorii  $x$  și  $y$ . El se numește *suma vectorilor*  $x$  și  $y$  și se scrie  $z = x + y$ .

**Definiția 3.2.** Aplicația  $+: (x, y) \in T\mathcal{A} \times T\mathcal{A} \rightarrow x + y \in T\mathcal{A}$  se numește *operația de adunare a vectorilor lui*  $\mathcal{A}$ . Are loc:

$$(3.1) \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \forall A, B, C \in \mathcal{A}.$$

**Teorema 3.1.** *Perechea  $(T\mathcal{A}, +)$  este un grup.*

*Demonstrație.*  $\forall x, y, z \in T\mathcal{A} : x = \overrightarrow{AB}, y = \overrightarrow{BC}, z = \overrightarrow{CD}$ , avem după (3.1):

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BD} = (x + y) + z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 0 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = x; \quad x + (-x) = \overrightarrow{AB} + \\ &+ (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

*Observație.* În general grupul  $(T\mathcal{A}, +)$  nu este abelian.

*Grupa a II-a de axiome*

Dacă operația  $+$  de adunare a vectorilor este dată de definiția 3.2, atunci:

$$II_1. \quad \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad \forall x, y \in T\mathcal{A};$$

$$II_2. \quad (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in T\mathcal{A};$$

$$II_3. \quad \alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in T\mathcal{A}.$$

Aici se încheie lista axiomelor unui spațiu aproape afin.

**Teorema 3.2.** *Dacă  $\mathcal{A}$  este un spațiu aproape afin, atunci  $(T\mathcal{A}, +, *)$  este un spațiu aproape liniar.*

În adevăr, teorema 3.1 și axiomele din grupa a II-a arată că terna  $(T\mathcal{A}, +, *)$  este un spațiu aproape liniar.

Putem acum să dezvoltăm geometria spațiilor aproape afine, dar operația trebuie făcută cu grijă, ținînd seama de proprietățile spațiului aproape liniar  $T\mathcal{A}$ .



*De exemplu:* Dacă  $A \neq B$  sînt două puncte din  $\mathcal{A}$ , atunci nu, putem defini dreapta determinată de aceste puncte, în mod obișnuit ca fiind mulțimea punctelor  $C$  din  $\mathcal{A}$  cu proprietatea  $\overrightarrow{AC} = \alpha * \overrightarrow{AB}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  deoarece nu am putea dovedi că punctul  $B$  aparține dreptei. Problema se rezolvă în felul următor. Se notează  $[\overrightarrow{AB}]$  mulțimea vectorilor  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\alpha * \overrightarrow{AB}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  și a sumelor finite de asemenea vectori. Dreapta determinată de punctele distincte  $A$  și  $B$  este definită ca mulțimea punctelor  $C \in \mathcal{A}$  pentru care vectorul  $\overrightarrow{AC}$  aparține mulțimii  $[\overrightarrow{AB}]$ .

Dar structura geometrică a acestor drepte nu este prea simplă. Cu toate acestea, problemele legate de apartenență a punctelor la o dreaptă, intersecții de drepte, paralelism pot fi rezolvate. În mod analog se definește noțiunea de plan determinat de trei puncte necoliniare sau de  $k$ -plan determinat de  $k + 1$  puncte care nu aparțin unui  $k - 1$ -plan. Nu insistăm asupra acestor chestiuni (pentru detalii se pot consulta lucrările [63], [67], [71]).

Vom dovedi acum că sistemul de axiome considerat este *necontradictoriu și minimal*. Despre complitudine nici nu poate fi vorba de vreme ce sistemului  $\mathcal{I}$  se poate adăuga axiome noi, independente de cele considerate (cum ar fi axioma  $\forall x \neq 0 = 1 * x \neq 0$ ).

**Teorema 3.3.** *Axiomele din grupele I-a și a II-a sînt necontradictorii.*

*Demonstrație.* Fie  $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  și  $\rho$  relația dată de  $[(a, b), (c, d)] \rho [(a', b'), (c', d')] \Leftrightarrow (c - a = c' - a' \text{ și } d - b = d' - b')$ . Se vede ușor că  $\rho$  este o echivalență; vectorul definit de segmentul orientat  $[(a, b), (c, d)]$  este dat de perechea  $X^1 = c - a$ ,  $X^2 = d - b$ . Se va lua apoi  $\alpha * X = \alpha * (X^1, X^2) = (\alpha X^1, \alpha X^2)$ . Toate axiomele din grupele I-a și a II-a sînt verificate, operație pe care o lăsăm în seama cititorului.

Atragem doar atenția că are loc:

**Teorema 3.4.** *Axiomele din grupele I-a și a II-a sînt independente.*

#### § 4. SPAȚIU AFINE REALE

**Definiția 4.1.** Un spațiu aproape afin  $\mathcal{A}$  (real) se numește *spațiu afin* (real sau peste cîmpul  $\mathbb{R}$ ), dacă în  $\mathcal{A}$  este verificată axioma

III.  $\forall x \in T\mathcal{A} \setminus \{0\} \Rightarrow 1 * x \neq 0$ .

Adăugînd această nouă axiomă grupelor I-a și a II-a, structura geometrică a spațiului aproape liniar  $\mathcal{A}$  se particularizează considerabil. În primul rînd avem:



**Teorema 4.1.** *Dacă  $\mathcal{A}$  este un spațiu afin (real), atunci  $(T\mathcal{A}, +, *)$  este un spațiu liniar (peste  $\mathbf{R}$ ).*

În adevăr, teorema 3.2 și axioma III au drept consecință faptul că  $(T\mathcal{A}, +, *)$  este un spațiu liniar. Putem aplica acum toate proprietățile cunoscute ale spațiilor liniare pentru a studia geometria lui  $\mathcal{A}$ :

**Definiția 4.2.** Se numește *geometrie afină* teoria semiformalizată a sistemului format din grupele I, a II-a și a III-a de axiome ale unui spațiu din real împreună cu noțiunile primare necesitate.

**Teorema 4.2.** *Geometria afină este necontradictorie. Sistemul său de axiome este minimal.*

Dintre noțiunile importante în această geometrie, prima pe care o întâlnim este aceea de dependență și independență afină a punctelor.

Un sistem de puncte  $A_0, A_1, \dots, A_k$  se numește *afin independent* (sau aceste puncte sînt *afin independente*), dacă vectorii  $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$  sînt liniar independenți. Este evident că această proprietate nu depinde de fixarea punctului  $A_0$  în această mulțime. Dacă  $A_0, A_1, \dots, A_k$  nu sînt puncte affine independente, atunci ele se numesc *afin dependente*.

De exemplu: Punctele  $A, B, C$  pentru care  $\overrightarrow{AB} = \lambda * \overrightarrow{AC}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$  sînt afin dependente.

Numim dreaptă determinată de punctele distincte  $A$  și  $B$  din  $\mathcal{A}$ , mulțimea tuturor punctelor din  $\mathcal{A}$  afin dependente de  $A$  și  $B$ .

**Propoziția 4.1.** *Dreapta definită de punctele distincte  $A, B$  din  $\mathcal{A}$  este mulțimea punctelor  $C \in \mathcal{A}$  pentru care*

$$(4.1) \quad \overrightarrow{AC} = \alpha * \overrightarrow{AB}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Într-adevăr, toate punctele  $C$  afin dependente de  $A$  și  $B$  sînt caracterizate de egalitatea (4.1).

(4.1) se numește *ecuația vectorială a dreptei* determinată de  $A$  și  $B$ . Ea este echivalentă cu ecuația vectorială

$$(4.1') \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \alpha * \overrightarrow{AB}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

în care  $O$  este un punct oarecare fixat în  $\mathcal{A}$ .

Proprietățile legate de apartenența punctelor la drepte și de intersecții de drepte se rezolvă acum ușor prin intermediul ecuației vectoriale (4.1) sau (4.1').

Vom spune că dreapta  $d$  determinată de punctele distincte  $A, B$  este paralelă cu dreapta  $d'$  determinată de punctele distincte  $C, D$



dacă vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  sînt liniar dependenți. Vom nota aceasta prin  $d \parallel d'$ .

**Propoziția 4.2.** Relația „ $\parallel$ ” este o echivalență pe mulțimea  $\mathcal{D}$  a dreptelor din spațiul afin  $\mathcal{A}$ .

Un element al mulțimii factor  $\mathcal{D}/\parallel$ , (o clasă de drepte paralele) se numește *direcție* a spațiului afin  $\mathcal{A}$ .

**Propoziția 4.3.** Printr-un punct  $A_0 \in \mathcal{A}$  trece o singură dreaptă de direcție dată.

În adevăr, o direcție este caracterizată printr-un vector nenul  $m \in T\mathcal{A}$ . Atunci dreapta de ecuație

$$\overline{OC} = \overline{OA_0} + \alpha * m, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

are proprietățile cerute.

O altă noțiune importantă este aceea „raport simplu a trei puncte coliniare”.

**Definiția 4.3.** Spunem că punctul  $C$  împarte segmentul orientat  $\overline{AB}$ ,  $A \neq B$ , în raportul  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  dacă  $\overline{AC} = k\overline{BC}$ . Seriem aceasta prin  $k = (A, B; C)$ . (De aici vom omite semnul  $*$  pentru produsul vectorilor cu scalari sau îl vom înlocui prin  $\cdot$ )

*Observație.*  $k = 1$  implică  $A = B$ , absurd.

**Propoziția 4.4.** 1° Punctele  $A, B$  distincte fiind date și numărul  $k \in \mathbb{R} \setminus \{+1\}$  fixat, există un singur punct  $C$  cu proprietatea  $k = (A, B; C)$ .

2° Punctele  $A, B, C$ ,  $A \neq B$ , coliniare fiind date, există un singur  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  încît  $k = (A, B; C)$ .

*Demonstrație.* Pentru un punct arbitrar  $O$ , egalitatea  $\overline{AC} = k\overline{BC}$  este echivalentă cu

$$(4.2) \quad \overline{OC} = \frac{\overline{OA} - k\overline{OB}}{1 - k}.$$

Atunci: 1°. Dacă  $A \neq B$  și  $k$  sînt date, (4.2) determină unic pe  $C$  cu proprietate cerută. 2° Dacă  $\overline{AC}, \overline{BC}$  sînt coliniari rezultă un definit numărul real  $k \neq 1$  încît  $\overline{AC} = k\overline{BC}$ , q.e.d.

Egalitatea  $(A, B; C) = -1$ , echivalentă cu  $\overline{AC} = \overline{CB}$ , este exprimată prin „ $C$  este mijlocul segmentului  $AB$ ” sau prin „punctele  $A, B$  sînt simetrice față de  $C$ ”.

Noțiunea de plan determinat de trei puncte necoliniare  $A, B, C$  este definită ca mulțimea tuturor punctelor  $D$  afin dependente de punctele  $A, B, C$ . Planul definit de punctele necoliniare  $A, B, C$  este caracterizat prin ecuația vectorială

$$\overline{AD} = \alpha \cdot \overline{AB} + \beta \cdot \overline{AC}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sau prin ecuația echivalentă:

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \alpha \cdot \overline{AB} + \beta \cdot \overline{AC}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$O$  fiind un punct fixat în  $\mathcal{A}$ , iar  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$  vectorii liniar independenți.

Toate proprietățile planului pot fi acum ușor studiate. De asemenea intersecția unui plan cu o dreaptă, a două plane sînt ușor de cercetat.

Noțiunea de  $m$ -plan, definit de  $m + 1$  puncte afin independente, este extinderea imediată a celei de dreaptă sau plan.

**Definiție.** Un spațiu afin (real)  $\mathcal{A}$  se numește de dimensiune  $n$ , dacă spațiul liniar tangent  $T\mathcal{A}$  are dimensiunea  $n$ .

Folosim notația  $\mathcal{A}_n$  pentru spațiul afin (real)  $n$ -dimensional. Pentru orice punct  $A_0$  găsim  $n$  vectori liniar independenți  $\overline{A_0A_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Punctele  $A_0, A_1, \dots, A_n$  sînt afin independente și alcătuiesc un reper cartezian în  $\mathcal{A}_n$ . Față de un astfel de reper putem caracteriza punctele prin cele  $n$  coordonate ale lor; noțiunile geometrice din  $\mathcal{A}_n$  se exprimă analitic ușor și geometria lui  $\mathcal{A}_n$  se edifică algebric.

*Observație.* În geometria afină expusă pînă aici cîmpul  $\mathbb{R}$  poate fi înlocuit cu cîmpul  $\mathbb{C}$  și vom obține geometria afină „complexă”.

## § 5. SPAȚII EUCLIDIENE

Spațiile euclidiene sînt particularizări ale celor afine reale. Atunci toate noțiunile afine sînt și noțiuni euclidiene; geometria euclidiană include geometria afină reală.

**Definiția 5.1.** Se numește *spațiu euclidian* un spațiu afin real  $\mathcal{A}$  pentru care spațiul tangent  $T\mathcal{A}$  este un spațiu liniar euclidian.

Aceasta înseamnă că  $T\mathcal{A}$  este dotat cu o aplicație de la  $T\mathcal{A} \times T\mathcal{A}$  cu valori în  $\mathbb{R}$ , notată  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  și numită produs scalar care verifică axiomele 1'–4' din definiția 2.2.



Notăm cu  $\mathcal{E}$  un spațiu euclidian și cu  $T\mathcal{E}$  spațiul său tangent.

**Definiția 5.2.** Se numește *geometrie euclidiană* teoria axiomatică semiformalizată a spațiului euclidian  $\mathcal{E}$ .

Nu este nici o dificultate să dovedim că geometria lui  $\mathcal{E}$  este necontradictorie și bazată pe un sistem minimal de axiome.

Citeva noțiuni geometrice importante, care derivă din structura de spațiu liniar euclidian al lui  $T\mathcal{E}$ , se bazează pe următoarea definiție:

**Definiția 5.3.** Numim distanță dintre punctele oarecari  $A$  și  $B$  din  $\mathcal{E}$ , numărul real nenegativ, notat  $d(A, B)$  și dat de

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

**Teorema 5.1.** Funcția „distanță”  $d: \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietățile:

$$1^\circ d(A, B) \geq 0, \forall A, B \in \mathcal{E};$$

$$2^\circ d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B;$$

$$3^\circ d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in \mathcal{E};$$

$$4^\circ d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B), \forall A, B, C \in \mathcal{E}.$$

**Demonstrație.**  $1^\circ$  Din definiția 5.3 și axioma  $4'$  rezultă  $d(A, B) \geq 0$ .

$2^\circ$  Aplicând propoziția 2.2,  $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$  și reciproc.

$$3^\circ d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|-\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(B, A).$$

$$4^\circ \text{ Utilizând inegalitatea lui Minkowski } d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{CB}\| = d(A, C) + d(C, B), \text{ q.e.d.}$$

Noțiunile de distanță și de unghi din spațiul euclidian  $\mathcal{E}$  permit să se stabilească o mulțime de rezultate interesante pentru noțiunile geometrice din  $\mathcal{E}$ . Fie  $A, B, C$  trei puncte necoliniare; spunem că  $A, B, C$  sînt vîrfurile unui triunghi. Notăm cu  $\hat{A}$  unghiul vectorilor  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Analog avem  $\hat{B}$  și  $\hat{C}$ . Fie apoi  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(C, A)$ ,  $c = d(A, B)$  numite lungimile laturilor triunghiului  $ABC$ .

**Propoziția 5.1.** În orice triunghi  $ABC$  are loc:  $c < a + b$ .

Se aplică  $4^\circ$  din teorema 5.1.

**Propoziția 5.2.** În orice triunghi  $ABC$  este adevărată formula lui Pitagora generalizată:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$\text{În adevăr, } a^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

**Observație.** Au loc și formulele obținute permutînd ciclic  $A, B, C$ .

**Propoziția 5.3.** Pentru orice triunghi  $ABC$

$$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B.$$

$$\text{În adevăr } c = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}{c} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{c} = b \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{B}.$$

**Propoziția 5.4.** Oricare ar fi triunghiul  $ABC$  avem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}, \quad k = \frac{2}{abc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{unde } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Folosind propoziția 5.2 după un calcul elementar avem  $\sin A = ka$ ,  $k$  fiind dat în enunțul propoziției.

**Teorema 4.8.** În orice triunghi  $ABC$  suma unghiurilor este egală cu  $\pi$ , adică  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ .

**Demonstrație.** Observînd că  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$  este echivalentă cu  $\cos(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = -1$  care la rîndul ei este echivalentă cu

$$1 + \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} = \sin \hat{A} \sin \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \cos \hat{B} \sin \hat{C} + \cos \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C};$$

după propozițiile 5.2 și 5.4 se verifică ușor ultima egalitate.

Un triunghi  $ABC$  cu proprietatea  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$  se numește dreptunghic.

**Teorema lui Pitagora.** Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic, avînd  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ , dacă și numai dacă

$$a^2 = b^2 + c^2$$



*Demonstrație.* Dacă  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$  din propoziția 5.2 avem  $a^2 = b^2 + c^2$ . Reciproc, din  $a^2 = b^2 + c^2$  și formula lui Pitagora generalizată  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$  rezultă  $-2bc \cos \hat{A} = 0 \Rightarrow \cos \hat{A} = 0 \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{2}$  q.e.d.

Un spațiu euclidian  $\mathcal{E}$  are dimensiunea  $n$ , dacă  $T\mathcal{E}$  are dimensiunea  $n$ . El se notează cu  $E_n$ .

Geometria spațiilor  $E_n$  poate fi dezvoltată analitic considerând repere carteziene ortonormate în  $E_n$  și referind punctele, dreptele, planele etc la ele. (A se vedea [26].) Ea are acum proprietatea de a fi o teorie necontradictorie, bazată pe un sistem minimal de axiome, completă și categorică. Aceste proprietăți vor fi dovedite în construcția lui Hilbert a geometriei euclidiene.

## Capitolul V

### BAZELE GEOMETRIEI EUCLIDIENE

În capitolul precedent am expus bazele algebrice ale geometriei euclidiene servindu-ne sistematic de cimpul numerelor reale pe care l-am construit mai înainte.

Dar geometria trebuie edificată, independent de cunoașterea cimpului numerelor reale, ca teorie semiformalizată care acopere întreg cuprinsul „Elementelor” lui Euclid. O atare construcție a fost făcută la sfârșitul secolului trecut de cunoscutul matematician german David Hilbert în cartea sa „Grundlagen der Geometrie” [50].

Sistemul de axiome enunțat de Hilbert este mult mai complicat\*, decît cel folosit în capitolul IV. Lucru firesc dacă observăm că avem de construit o teorie axiomatice, complexă care are un număr mare de noțiuni și relații primare și, desigur, un număr mare de axiome. Acest sistem prezintă însă și cîteva avantaje importante:

- nu folosește elemente exterioare geometriei;
- axiomele sînt grupate în mod natural;
- dezvoltarea teoriei este făcută gradat și sistematic;
- surprinde partea comună a geometriilor euclidiană și hiperbolică;

— satisface problemele de metateorie: necontradicție, minimalitate, completitudine și categoricitate.

Vom enunța pe rînd grupele de axiome și cele mai importante consecințe ale lor pentru geometria spațiului euclidian.

Sistemul axiomatice al lui Hilbert constituie o teorie semiformalizată. Noțiunile primare sînt *punct*, *dreaptă*, *plan*, iar relații primare sînt: *incidența*, „a fi între”, *congruența*. Punctele vor fi notate cu  $A, B, C, \dots$ , dreptele cu  $a, b, c, \dots$  iar planele cu  $\alpha, \gamma, \dots$ , incidența va fi semnalată prin simbolul „de apartenență”, relația „a fi între” prin succesiunea de liniițe  $\overline{--}$ , iar congruen-

\* Problema adoptării unuiu sau altuia dintre sistemele axiomatice, expuse capitolele IV și V, pentru predarea geometriei în școală este discutată în apendixul la sfârșitul cărții.



prin semnul  $\equiv$ . Axiomele, în număr de 20, sînt grupate în cinci grupe; primele trei grupe sînt consacrate succesiv celor trei relații fundamentale iar ultimele două grupe impun condiții suplimentare prin intermediul unor noțiuni derivate.

Atragem atenția că formularea dată de Hilbert axiomelor evită complet teoria mulțimilor și acesta este un avantaj de natură științifică a sistemului deoarece analiza sa metateoretică nu este influențată de existența sau nonexistența unei teorii deductivene contradictorii pentru mulțimi. Avînd însă în vedere că actuala expunere are în primul rînd un scop didactic vom împrumuta unele noțiuni, notații sau formulări din teoria mulțimilor.

Sistemul axiomatic al geometriei nu justifică nici o modalitate de „ilustrare” a noțiunilor geometrice. Există însă anumite desene ce ajută „urmărirea intuitivă” a unor raționamente abstracte. Vom însoți unele raționamente abstracte de figuri ce nu au „caracter oficial”. Pentru a sublinia caracterul convenționat al ilustrațiilor nu vom adopta interpretarea tradițională, euclidiană, a dreptelor; în loc să le trasăm cu rigla le vom trasa cu compasul. Vom constata în capitolul VIII, § 5, că pînă la un punct o astfel de convenție este legitimă.

## § 1. GRUPA I—A DE AXIOME

Relația primară ce intervine în aceste axiome este *incidența*. Noi vom asimila o dreaptă  $d$  prin mulțimea punctelor incidente dreptei și vom putea înlocui exprimarea: „punctul  $A$  este incident dreptei  $d$ ” prin „ $A$  aparține lui  $d$ ”. Complet analog, vom asimila un plan  $\alpha$  prin mulțimea punctelor incidente lui. Apare firesc și relația derivată: *incluziunea*, ce beneficiază de definiția: dreapta  $d$  este inclusă în planul  $\alpha$  dacă orice punct incident dreptei  $d$  este incident planului  $\alpha$ .

De fapt, prin posibilitatea de a alege între diferite formulări ale aceleiași propoziții matematice înlăturăm pericolul monotoniei și repetițiile indezirabile.

Prezentăm în continuare cele opt axiome „de incidență” sau „de apartenență”.

- I<sub>1</sub>. Fiind date două puncte există cel puțin o dreaptă la care ele aparțin.
- I<sub>2</sub>. Pentru orice două puncte distincte există cel mult o dreaptă incidentă lor.

- I<sub>3</sub>. Fiecărei drepte îi aparțin cel puțin două puncte. Există trei puncte încît nici o dreaptă nu poate fi incidentă tuturor acestor puncte.
- I<sub>4</sub>. Fiind date trei puncte există cel puțin un plan incident lor. Pentru orice plan există măcar un punct care îi aparține.
- I<sub>5</sub>. Fiind date trei puncte, care nu aparțin nici unei drepte, există cel mult un plan incident lor.
- I<sub>6</sub>. Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci orice punct al dreptei aparține aceluia plan.
- I<sub>7</sub>. Dacă două plane au un punct care le aparține simultan, atunci ele mai au cel puțin încă un punct cu această proprietate.
- I<sub>8</sub>. Există patru puncte încît nici un plan nu este incident tuturor acestor puncte.

Desigur, cu notațiile adoptate, axiomele pot fi formulate mai succint; de exemplu: I<sub>1</sub>.  $\forall A, B, \exists a : A \in a, B \in a$  etc.

Pentru scurtarea unor exprimări se vor folosi noțiuni derivate a căror definiție este ușor de subînțeles: (puncte) coliniare, (puncte) coplanare, (drepte sau plane) secante etc.

Axiomele I<sub>3</sub> și I<sub>4</sub> cuprind de fapt cîte două axiome, dar s-a păstrat în esență formularea lui Hilbert, pentru a nu mări prea mult numărul axiomelor.

Dacă reținem numai axiomele I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub> și prima parte a axiomei I<sub>3</sub> avem grupa I-a a axiomelor geometriei pe dreaptă.

Axiomele I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub> și I<sub>3</sub> dau axiomele de apartenență ale geometriei planului. Ultima parte a axiomei I<sub>3</sub> postulează dimensiunea planului, așa cum axioma I<sub>8</sub> arată că geometria spațiului considerat nu se reduce la geometria unui plan.

Iată cîteva consecințe imediate, ușor de demonstrat:

**Propoziția 1.1.** Pentru orice dreaptă  $a$ , există măcar un punct  $A$  neincident ei.

**Propoziția 1.2.** Pentru orice plan  $\alpha$ , există măcar un punct  $A$ , încît  $A \notin \alpha$ .

**Propoziția 1.3.** Oricare ar fi punctele distincte  $A$  și  $B$ , există o singură dreaptă  $a$ , încît  $A \in a, B \in a$ .

**Propoziția 1.4.** Oricare ar fi punctele  $A, B, C$  necoliniare, există un singur plan  $\alpha$  incident lor.

Vom nota uneori dreapta  $a$  din propoziția 1.3 prin  $(AB)$  iar planul  $\alpha$  din propoziția 1.4 prin  $(ABC)$ ; în expunerea ulterioară vom folosi frecvent expresii ca „dreapta  $AB$ ”, „planul  $ABC$ ” considerînd



că expresia „dreapta  $(AB)$ ” constituie un pleonasm justificat doar de dorința de a sublinia un anumit aspect.

**Propoziția 1.5.** Două drepte distincte au cel mult un punct comun.

**Propoziția 1.6.** Două plane distincte care au un punct comun, au o dreaptă și numai una în comun.

**Propoziția 1.7.** Două plane distincte au cel mult o dreaptă în comun.

**Propoziția 1.8.** O dreaptă  $a$  și un plan  $\alpha$  pot avea următoarele poziții relative:  $a \subset \alpha$ ;  $a$  și  $\alpha$  au un singur punct comun;  $a$  și  $\alpha$  nu au nici un punct comun.

**Propoziția 1.9.** Date fiind o dreaptă  $a$  și un punct  $A$  care nu aparține, există un singur plan  $\alpha$  cu proprietățile  $a \subset \alpha$ ;  $A \in \alpha$ .

**Propoziția 1.10.** Pentru orice plan există măcar trei puncte necoliniare care îi aparțin.

## § 2. GRUPA A II-A DE AXIOME

Această grupă este intitulată *grupa axiomelor de ordonare* și cuprinde 4 axiome. Se consideră aici o nouă relație primară care se referă la calitatea unui punct de „a fi între” alte două puncte, cele trei puncte fiind distincte două câte două. Prezentăm axiomele:

- $\Pi_1$ . Dacă punctul  $B$  este între punctele  $A$  și  $C$ , atunci punctele  $A, B, C$  sînt coliniare distincte și punctul  $B$  este și între punctele  $C$  și  $A$ .
- $\Pi_2$ . Pentru orice două puncte distincte  $A$  și  $B$  există măcar un punct  $C$  coliniar cu  $A$  și  $B$  înct punctul  $B$  este între punctele  $A$  și  $C$ .
- $\Pi_3$ . Dintre trei puncte, distincte două câte două, cel mult unul este între celelalte două.
- $\Pi_4$ . Pentru orice trei puncte necoliniare  $A, B, C$  și orice dreaptă  $a$  din planul lor, la care nu aparține nici unul dintre punctele  $A, B, C$ , dacă pe  $a$  există un punct care se află între două dintre punctele  $A, B, C$ , atunci pe  $a$  există cel puțin încă un punct care se află între alte două dintre punctele  $A, B, C$ .

Folosim pentru  $\Pi_4$  denumirea *axioma lui Pasch*.

Pentru situația că  $B$  este între  $A$  și  $C$  folosim notația  $A-B-C$  sau  $B \in |AC|$ ; subînțelegem evident  $|AC|$  drept submulțime a punctelor dreptei  $AC$ . Din axiome rezultă  $|AA| = \emptyset$  și  $|AC| = |CA|$ . Numim *segment* o pereche neordonată de puncte  $\{A, B\}$

se va nota cu  $AB$  sau cu  $BA$ ,  $A$  și  $B$  sînt numite *extremitățile* segmentului, iar punctele  $C$  cu proprietatea  $A-C-B$  sînt puncte interioare segmentului. Dacă  $A \neq B$ , punctele dreptei  $(AB)$  care nu sînt extremități sau puncte interioare segmentului  $AB$  se numesc *puncte exterioare* segmentului  $AB$  pe dreapta  $a$ .

Numim *triunghi* o ternă neordonată de puncte necoliniare  $A, B, C$ . Îl vom nota  $ABC$  sau  $\triangle ABC$  și vom numi punctele  $A, B, C$  *vîrfurile sale* iar segmentele  $AB, BC, CA$  *laturile sale*; uneori prin laturi vom înțelege dreptele determinate de vîrfuri. Cu această pregătire cititorul poate reformula axioma lui Pasch într-un mod mai convenabil.

Dintre consecințele axiomelor din grupele I-a și II-a reținem numai cîteva.

**Teorema 2.1.** Orice segment  $AB, A \neq B$  are puncte interioare.

**Demonstrație.** Fie  $E$  un punct care nu este coliniar cu  $A, B$  și punctul  $F$  ales (conform axiomei  $\Pi_2$ ) așa ca  $A-E-F$ . (fig. 1). Există un punct  $G$  cu proprietatea  $F-B-G$ . Aplicăm axioma lui Pasch triunghiului  $AFB$  și dreptei  $EG$ . Găsim că dreapta  $EG$  nu poate tăia latura  $FB$ , deci are un punct comun cu interiorul segmentului  $AB$ , q.e.d.

**Teorema 2.2.** Pentru orice trei puncte  $A, B, C$  coliniare și distincte două câte două unul și numai unul dintre ele se află între celelalte două.

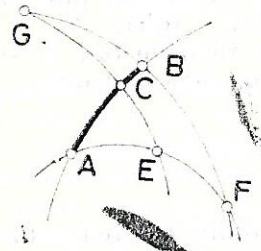


Fig. 1

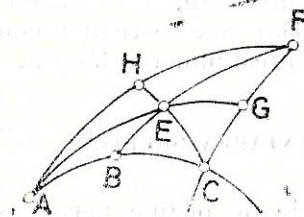


Fig. 2

**Demonstrație.** După axioma  $\Pi_2$  este suficient să dovedim că cel puțin unul dintre punctele  $A, B, C$  coliniare și distincte două câte două, se află între celelalte două.

Să admitem că nu avem  $B-A-C$  și nici  $B-C-A$ . Să arătăm că avem  $A-B-C$ . Fie  $E$  un punct care nu aparține dreptei  $AB$  și  $F$  un punct pentru care  $B-E-F$  (fig. 2). Axioma  $\Pi_4$  aplică triun-



ghiului  $BFC$  și dreptei  $AE$ , determină un punct  $G$  așa ca  $F-G-C$ . Din nou aplicând axioma lui Pasch triunghiului  $ABF$  și dreptei  $CE$  găsim un punct  $H$ , încît  $A-H-F$ . Urmează imediat  $A-E-G$  și printr-o nouă aplicare a axiomei  $\Pi_4$  triunghiului  $ACG$  și dreptei  $FE$  rezultă  $A-B-C$ , q.e.d.

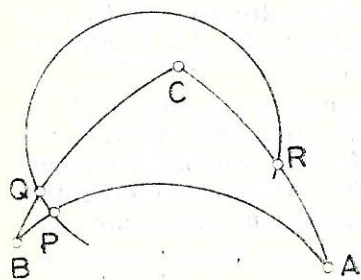


Fig. 3

**Teorema 2.3.** Fie  $ABC$  un triunghi și  $a$  o dreaptă din planul său neincidentă cu nici un vîrf. Dacă  $a$  taie în interior una dintre laturile triunghiului, atunci ea mai taie în interior una și numai una dintre celelalte două laturi. *Demonstrație.* După axioma lui Pasch, dacă  $a$  taie în punctul  $P$  interior latura  $AB$  a triunghiului, atunci ea taie în interior cel puțin una dintre laturile  $|BC|$  și  $|CA|$  (fig. 3). Să admitem că  $a$  taie în interior și pe  $|BC|$  în punctul  $Q$  și pe  $|CA|$  în punctul  $R$ . Avem astfel

$$(*) \quad A-P-B, \quad B-Q-C, \quad C-R-A$$

Este clar că punctele  $P, Q, R$  ale dreptei  $a$  sînt distincte două cîte două. După teorema precedentă numai unul dintre aceste puncte se află între celelalte două. Fie aceasta  $Q$ . Atunci  $P-Q-R$ . Considerăm triunghiul  $APR$  și dreapta  $BC$  care taie latura  $PR$  în punctul interior  $Q$ . După axioma lui Pasch ea trebuie să taie în interior cel puțin una dintre laturile rămase, adică  $A-B-P$  sau  $A-C-R$ . Dar aceste relații contrazic relațiile (\*). Absurditatea provine din presupunerea făcută. Teorema este dovedită.

### § 3. ORIENTAREA DREPTEI

Axiomele de ordine permit să stabilim existența unei relații de ordine totală pentru punctele unei drepte oarecare. Aceasta la rîndul ei ne va da posibilitatea să arătăm că o dreaptă ordonată este asemenea cu mulțimea  $(\mathbb{R}, \leq)$ . Pentru a evita dificultățile din abordările uzuale ale acestui subiect vom prezenta o construcție inedită.

**Lema 3.1.** Fie  $A, B, C, D$  patru puncte coliniare. Dacă  $A-D-C$  și  $B-D-C$  nu au loc, atunci nici  $A-D-B$  nu are loc.

În adevăr, dacă  $E$  nu aparține dreptei pe care se găsesc punctele date și  $F$  este un punct cu proprietatea  $C-E-F$ , putem aplica axioma  $\Pi_1$  triunghiului  $ACF$  și dreptei  $DE$  (fig. 4). Rezultă că

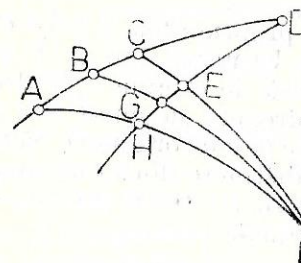


Fig. 4

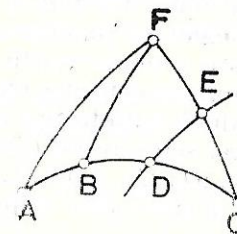


Fig. 5

există un punct  $H$  încît  $A-H-F$ . Considerînd acum  $\triangle BCF$  și dreapta  $DE$  obținem un punct  $G$  încît  $B-G-F$ . După teorema 2.3 pentru  $\triangle ABF$ , punctul  $D$  nu poate satisface relația  $A-D-B$ .

**Lema 3.2.** Dacă pentru patru puncte coliniare au loc relațiile  $A-D-C$ ,  $B-D-C$ , atunci nu are loc relația  $A-D-B$ .

În adevăr, fie  $E$  un punct ce nu aparține dreptei celor patru puncte  $A, B, C, D$  și  $F$  un punct cu proprietatea  $C-E-F$  (fig. 5). Axioma lui Pasch și teorema 2.3 aplicate triunghiurilor  $AFC$ ,  $BFC$  și dreptei  $DE$  arată că  $DE$  nu poate tăia în interior segmentele  $AF$  și  $BF$ , care sînt laturi ale triunghiului  $ABF$ . Deci punctul  $D$  nu poate fi interior segmentului  $AB$ .

Fie acum  $a$  o dreaptă,  $O$  un punct al ei și  $\mathcal{M}$  mulțimea punctelor lui  $a$  mai puțin punctul  $O$ . Pe  $\mathcal{M}$  considerăm următoarea relație  $\sim$ :  $A \sim B \Leftrightarrow (A = B, \text{ sau } O-A-B, \text{ sau } O-B-A) \Leftrightarrow \text{non } A-O-B$ .

**Propoziția 3.1.** Relația  $\sim$  este o echivalență pe mulțimea  $\mathcal{M}$ .

În adevăr,  $A \sim A$ ,  $\forall A \in \mathcal{M}$ . Din definiția relației  $\sim$ ,  $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ . Să presupunem acum că  $A \sim B$ ,  $B \sim C$  au loc. Aceasta înseamnă că nu avem  $A-O-B$  nici  $C-O-B$  (nici  $O=A$ ,  $O=B$ ,  $O=C$ ). După lema 3.1 nu avem  $A-O-C$  (sau  $O=A$ ,  $O=C$ ). În consecință, avem  $O-A-C$ , sau  $O-C-A$  sau  $A=C$ , deci  $A \sim C$ , q.e.d.

Considerăm mulțimea cit  $\mathcal{M}/\sim$ . Un element al acestei mulțimi se numește o *semidreaptă deschisă* de origine  $O$  a dreptei  $a$ .

**Teorema 3.1.** Fie  $a$  o dreaptă și  $O$  un punct fixat al ei. Există două și numai două semidrepte deschise de origine  $O$  pe  $a$ .

*Demonstrație.* Una oarecare dintre semidreptele deschise de origine  $O$  pe  $a$  este determinată de un reprezentant al ei,



care este un punct oarecare  $A \neq O$ , pe dreapta  $a$ . Fixînd pe  $A$  am definit semidreapta deschisă, pe care o notăm  $(O; A)$ , dată de

$$(O; A) = \{B \in a : O-A-B \text{ sau } O-B-A \text{ sau } B=A\}.$$

Să considerăm acum un punct  $C$  cu proprietatea  $A-O-C$ . După axioma  $II_2$  asemenea puncte există. Urmează  $C \in a$ ,  $C \notin (O; A)$ . Deci  $(O; C)$  este o semidreaptă deschisă de origine  $O$  pe dreapta  $a$ , care nu are puncte comune cu semidreapta deschisă  $(O; A)$ . Prin urmare există două semidrepte deschise pe  $a$  de origine  $O$ . Să admitem că ar exista trei semidrepte deschise distincte două câte două pe  $a$ :  $(O; A)$ ,  $(O; B)$ ,  $(O; C)$ . Atunci  $A-O-B$ ,  $B-O-C$  și  $C-O-A$ . Dar după lema 3.2 aceasta este imposibil, q.e.d.

Vom nota

$$(O; A) \cup \{O\} = [O; A)$$

și o vom numi *semidreaptă (închisă) de origine  $O$  și trecînd prin  $A$* . Cînd nu vor fi posibile confuzii, vom nota semidreptele (închise) cu  $h, k, \dots$ , folosind eventual și indici.

**Teorema 3.2.** Fie  $a$  o dreaptă și  $O$  un punct fixat al ei. Există două și numai două semidrepte  $[O; A)$ ,  $[O; B)$  pe  $a$  cu proprietatea că reuniunea lor ne dă mulțimea punctelor dreptei și a intersecția lor este mulțimea  $\{O\}$ .

Demonstrația este imediată dacă se observă teorema 3.1 și definiția semidreptelor  $[O; A)$ ,  $[O; B)$  cu  $A-O-B$ .

Să considerăm o dreaptă  $a$  și fie  $\Sigma$  mulțimea tuturor semidreptelor sale. Pe  $\Sigma$  introducem relația binară  $\simeq$  definită prin  $h \simeq k \Leftrightarrow h \cap k \in \Sigma$ . Folosind cele două leme de mai sus vom constata:

$$h \simeq k \Leftrightarrow h \subset k \text{ sau } k \subset h.$$

**Propoziția 3.2.** Relația  $\simeq$  este o echivalență pe  $\Sigma$ .

Afirmația rezultă ușor din definiția relației  $\simeq$  și din proprietățile incluziunii.

O clasă de echivalență, în raport cu  $\simeq$ , în mulțimea  $\Sigma$  se numește o *orientare a dreptei  $a$* . Un reprezentant al unei orientări este o semidreaptă  $[O; A)$  a dreptei  $a$ .

**Teorema 3.3.** Dreapta  $a$  are două și numai două orientări.

În adevăr, după teorema 3.2, există doi și numai doi reprezentanți distincți de origine  $O$ :  $[O; A)$  și  $[O; B)$  cu  $A-O-B$ , q.e.d.

Una dintre cele două orientări ale drepte  $a$  se va numi *pozitivă*, cealaltă *negativă*.

În concluzie, a fixa o orientare pe o dreaptă  $a$  revine la a preciza o semidreaptă  $h$  inclusă în  $a$ . Toate celelalte semidrepte ale drepte  $a$  în relația  $\simeq$  cu  $h$  vor fi reprezentanți pentru această orientare. Dacă orientarea dată de  $h = [O; A)$  este numită pozitivă, atunci orientarea negativă este caracterizată de exemplu de o semidreaptă  $[O; B)$  cu  $A-O-B$ .

**Definiția 3.1.** Numim *segment orientat* sau *bipunct* o pereche ordonată de puncte  $(A, B)$ . Dacă  $A = B$ , segmentul  $(A, A)$  se va numi *segment orientat nul*.

Notăm cu  $\overline{AB}$  segmentul orientat  $(A, B)$ . Punctul  $A$  se numește originea iar  $B$  extremitatea lui.

Dacă  $a$  este o dreaptă orientată și  $\overline{AB}$  este un segment orientat nenul al ei ( $A \in a$ ,  $B \in a$ ), atunci spunem că  $\overline{AB}$  este *orientat pozitiv* (negativ) dacă semidreapta  $[A; B)$  este orientată pozitiv (negativ).

Toate proprietățile cunoscute pentru mulțimea segmentelor orientate ale unor drepte, pot fi acum reproduse punct cu punct. Remarcăm doar că pentru  $A \neq B$  segmentele orientate  $\overline{AB}$  și  $\overline{BA}$  au orientări opuse.

**Ordonarea punctelor unei drepte.** Fie  $a$  o dreaptă pe care am fixat o orientare, numită pozitivă.

**Definiția 3.2.** Spunem că punctul  $A \in a$  precede punctul  $B \in a$ , și notăm  $A < B$  dacă segmentul orientat nenul  $\overline{AB}$  este orientat pozitiv. Vom pune  $A \leq B$  dacă  $A < B$  sau  $A = B$ .

**Teorema 3.4.** Relația  $\leq$  pe mulțimea punctelor drepte  $a$  este o relație de ordine totală.

**Demonstrație.** Conform definiției relației  $\leq$  avem  $A \leq A$ ; dacă  $A \leq B$  și  $B \leq A$  presupunerea  $A \neq B$  conduce la absurd, deci are loc  $A = B$ . Dacă  $A \leq B$ ,  $B \leq C$ , atunci  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  sînt orientate pozitiv, adică semidreptele  $[A; B)$ ,  $[B; C)$  sînt orientate pozitiv. Aceasta implică faptul că  $[A; C)$  este orientată pozitiv, deci  $A \leq C$ . (Cazurile cînd  $A = B$ , sau  $B = C$  se tratează separat.)

În fine, pentru  $A, B$  arbitrare, dacă  $A \neq B$ , atunci  $\overline{AB}$  este orientat pozitiv sau negativ. Deci are loc exact una dintre următoarele trei situații:  $A < B$ ,  $A = B$ ,  $B < A$ .

**Teorema 3.5.** Dacă  $A-B-C$ , atunci  $C < B < A$  sau  $A < B < C$  și reciproc.

Demonstrația rezidă în observația că situația  $A-B-C$  este echivalentă cu: „ $\overline{BA}$  și  $\overline{BC}$  sînt orientate diferit”. Cele două even-



tualități din enunț corespund alegerii orientărilor furnizate pe  $(AB)$  de  $[B; A)$  respectiv  $[A; B)$ .

Fie  $\leq$  o relație de ordine pe mulțimea punctelor incidente unei drepte  $a$ ; se spune că  $\leq$  este *compatibilă* cu relația „a fi între”,  $? - ? - ?$ , dacă

$$A < B \text{ și } B < C \Rightarrow A - B - C.$$

Rezultă astfel următoarea teoremă ce rezumă considerațiile din această primă parte a paragrafului.

**Teorema 3.6.** *Pe o dreaptă  $a$  există exact două ordonări totale compatibile cu relația „a fi între” și una din aceste ordonări este inversa celeilalte. Alegerea unei ordonări compatibile pe  $a$  este echivalentă cu orientarea dreptei  $a$ .*

Noțiunea de orientare a dreptei poate fi extinsă la plan și la spațiu, dar problema nu mai este simplă. Din acest motiv prezentăm numai noțiunea de semiplan.

Fie  $\alpha$  un plan și  $a$  o dreaptă a sa. Notăm cu  $\mathcal{M}$  mulțimea punctelor planului  $\alpha$  care nu aparțin dreptei  $a$ . Considerăm pe  $\mathcal{M}$  relația binară  $\sim$  definită prin:  $A \sim B$  dacă și numai dacă nu există pe  $a$  puncte interioare segmentului  $AB$ :

$$A \sim B \Leftrightarrow |AB| \cap a = \emptyset.$$

**Propoziția 3.3.** *Relația  $\sim$  este o echivalență pe  $\mathcal{M}$ .*

Într-adevăr,  $\forall A \in \mathcal{M}$ , avem  $A \sim A$ . Dacă  $A \sim B$ , atunci  $|AB|$  și  $a$  nu au nici un punct comun, deci  $B \sim A$ . Dacă acum  $A \sim B$  și  $B \sim C$ , atunci presupunând că punctele  $A, B, C$  nu sînt coliniare, segmentul  $|AC|$  nu poate avea puncte comune cu  $a$ , deoarece după teorema 3.2 ar urma că  $|AB|$  sau  $|BC|$  ar avea puncte comune cu  $a$ , ceea ce este absurd. Dacă  $A, B, C$  sînt coliniare, aplicînd lemele 3.1 și 3.2 concluzia este imediată, q.e.d.

O clasă de echivalență, în raport cu  $\sim$ , în mulțimea  $\mathcal{M}$  se numește un *semiplan deschis, determinat de dreapta  $a$  în planul  $\alpha$* . Se notează cu  $(a; A)$ ,  $A$  fiind un reprezentant al semiplanului considerat.

**Teorema 3.7.** *Fie  $\alpha$  un plan și  $a$  o dreaptă din  $\alpha$ . Atunci există două și numai două semiplane deschise determinate de dreapta  $a$  în planul  $\alpha$ .*

**Demonstrație.** Fiecare semiplan deschis  $(a; A)$  fiind caracterizat printr-un punct  $A$ , putem fixa unul dintre ele. Dacă  $C \in a$  este un punct oarecare, putem găsi un punct  $B$  așa ca  $A - C - B$ .

Atunci  $A \sim B$  și  $(a; B)$  este un alt semiplan deschis. În consecință există măcar două semiplane deschise determinate de dreapta  $a$  în planul  $\alpha$ .

Să admitem că ar exista trei semiplane  $(a; A)$ ,  $(a; B)$ ,  $(a; C)$  distincte două câte două. Punctele  $A, B, C$  pot fi presupuse necoliniare evident. Atunci dreapta  $a$  nu trece prin nici unul dintre vîrfurile triunghiului  $ABC$  și taie în interior fiecare latură a sa, absurd în baza teoremei 3.2, etc.

Notăm cu  $[a; A)$  mulțimea  $(a; A)$  la care se adaugă mulțimea punctelor dreptei  $a$ .  $[a; A)$  se numește *semiplan (închis) determinat de dreapta  $a$  în planul  $\alpha$* .

**Definiție.** Se numește *unghi* un sistem de două semidrepte  $[O, A)$ ,  $[O, B)$  cu aceeași origine. Dacă  $[O; A) = [O; B)$  unghiul se numește *unghi nul* (sau *turtit*), iar dacă  $[O; A)$  și  $[O; B)$  sînt distincte dar aparțin unei drepte unghiul se numește „*alungit*”. Unghiurile care nu sînt nule sau alungite se numesc *unghiuri proprii*. Punctul  $O$  se numește *vîrf* unghiului iar semidreptele  $[O; A)$ ,  $[O, B)$  *laturile* sale. Notăm și cu  $\widehat{hOk}$  sau  $\widehat{h, k}$  sau  $\widehat{AOB}$  un unghi, punînd în evidență originea sa și semidreptele  $h$  și  $k$  sau numai semidreptele care sînt laturi ale sale.

Unghiului  $AOB$  i se asociază mulțimea  $\text{Int } \widehat{AOB} = ((OA); B) \cap ((OB); A)$ , ale cărei puncte  $M$  se zic *interioare* unghiului  $AOB$  și se caracterizează evident prin faptul că sînt de acea parte a lui  $(OA)$  de care este  $B$  și de acea parte a lui  $(OB)$  de care este  $A$ . Se deduce ușor:

**Propoziția 3.4.** *Fie unghiul  $AOB$  și semidreapta deschisă  $s = (O; C)$ ; următoarele trei afirmații sînt echivalente:*

1°  $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$ ; 2°  $s \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ ; 3°  $s$  conține un punct interior segmentului  $AB$ :  $s \cap |AB| \neq \emptyset$ .

Noțiunea de *semispațiu* delimitat de un plan  $\alpha$  este analoagă celei de semiplan; o vom considera cunoscută.

#### § 4. GRUPA A III-A DE AXIOME

Cele cinci axiome ale acestei grupe se referă la relația primară de *congruență*. Desigur că denumirea ce o atribuim acestei relații și modul ei de notare sînt arbitrare; este de dorit ca nici din denumire și nici din notație să nu rezulte că ar fi o relație de echivalență pentru a nu adăuga axiomelor condiții suplimentare. Notafia preconizată de



Hilbert pentru această relație,  $\equiv$ , a fost acceptată pe plan mondial și apare inutil și dificil de înlocuit. Menționăm însă că marele matematician român Dan Barbilian (același cu poetul de excepție Ion Barbu) a propus pentru această relație simbolul  $\Rightarrow$  ce sugerează inspirat absența din axiome a cererii de reflexivitate a congruenței. Din motive didactice și pentru a interpreta congruența în teoria mulțimilor o putem „desface” în două relații binare: o „congruență a segmentelor” și „o congruență a unghiurilor”.

## GRUPA A III-A DE AXIOME

- III<sub>1</sub>.** Pentru orice segment nenul  $AB$  și orice semidreaptă  $h$  cu originea un punct oarecare  $A'$ , există cel puțin un punct  $B'$  pe  $h$  așa ca  $AB \equiv A'B'$ .
- III<sub>2</sub>.** Dacă  $AB \equiv CD$ ,  $A'B' \equiv CD$ , atunci  $AB \equiv A'B'$ .
- III<sub>3</sub>.** Dacă  $A-B-C$ ,  $A'-B'-C'$ ,  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$ , atunci  $AC \equiv A'C'$ .
- III<sub>4</sub>.** Pentru orice unghi nealungit orice semiplan  $\sigma$  determinat de o dreaptă  $a$  într-un plan și orice semidreaptă  $h'$  a dreptei  $a$  există o singură semidreaptă  $k'$  în  $\sigma$ , (cu aceeași origine ca  $h'$ ) încît  $\widehat{h, k} \equiv \widehat{h', k'}$ . Orice unghi este congruent cu el însuși.
- III<sub>5</sub>.** Dacă  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sînt două triunghiuri pentru care  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ , atunci  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ .

Cum se vede primele trei axiome se referă la congruența segmentelor, a patra numai la congruența unghiurilor, iar ultima le cuprinde pe amîndouă.

În baza axiomelor din grupele I, II și III se obține un număr mare de consecințe importante; vom expune aici doar cîteva.

**Propoziția 4.1.** Fie  $ABC$ ,  $A'B'C'$  două triunghiuri cu proprietatea  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ . Atunci  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ ,  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ .

Proprietatea este consecința imediată a axiomei III<sub>5</sub>.

**Teorema 4.1.** Relația  $\equiv$  este o echivalență pe mulțimea segmentelor.

*Demonstrația* acestei teoreme o vom prezenta într-un cadru mai larg ce prezintă și interes intrinsec. Fie  $\mathcal{S}$  mulțimea tuturor segmentelor și o relație  $\sim$  pe  $\mathcal{S}$  ce satisface condițiile:

$$E.1 \quad \forall s \in \mathcal{S}, \exists s' \in \mathcal{S} : s \sim s' \text{ și}$$

$$E.2 \quad (s_1 \sim s_3 \text{ și } s_2 \sim s_3) \Rightarrow s_1 \sim s_2.$$

Se constată ușor că  $\sim$  este o echivalență. Într-adevăr, pentru  $x$  arbitrar în  $\mathcal{S}$  există conform E.1 un  $y$  încît  $x \sim y$ ; urmează ( $x \sim y$  și  $x \sim y$ ) și de aici, conform E.2, rezultă  $x \sim x$ , adică  $\sim$  este reflexivă. Constatăm apoi  $x \sim y \Rightarrow (y \sim y \text{ și } x \sim y) \Rightarrow y \sim x$ , deci  $\sim$  este simetrică. Pe baza proprietății de simetrie putem reformula E.2 prin:  $(s_1 \sim s_3 \text{ și } s_3 \sim s_2) \Rightarrow s_1 \sim s_2$ , implicație ce exprimă tranzitivitatea lui  $\sim$ .

Se constată acum ușor că  $\equiv$  satisface E.1 (ca o „esențializare” a axiomei III<sub>1</sub>) și E.2 (ce coincide cu III<sub>2</sub>), deci  $\equiv$  este o echivalență, q.e.d.

Am scos astfel în evidență un element de „estetică” a axiomaticii hilbertiene: cererile „modeste” din axiome conduc prin „gospodărire rațională” la concluzii majore.

**Teorema 4.2.** Pentru orice segment  $AB$  și orice semidreaptă  $h$  de origine  $A'$  există un singur punct  $B'$  pe  $h$ , încît  $AB \equiv A'B'$ .

*Demonstrație.* După axioma III<sub>1</sub> avem de dovedit numai unicitatea punctului  $B'$ . Prin absurd presupunem că există  $B'' \neq B'$  încît  $AB \equiv A'B'$  și  $AB \equiv A'B''$ . Fie  $F$  un punct care nu aparține dreptei punctelor  $A', B', B''$ . Din triunghiurile  $AFB'$  și  $AFB''$  și

propoziția 4.1 avem  $\widehat{AFB'} \equiv \widehat{AFB''}$  și, evident,  $[F; B')$ ,  $[F; B'')$  sînt în același semiplan determinat de dreapta  $AF$ . Aceasta contrazice

unicitatea unghiului  $\widehat{AFB'}$ , q.e.d.

Prin reducere la absurd decurge de aici implicația:

$$(A-B-C \text{ și } A'-B'-C' \text{ și } AB \equiv A'B' \text{ și } AC \equiv A'C') \Rightarrow (4.1) \quad \Rightarrow (BC \equiv B'C').$$

În cele ce urmează, prin considerarea concomitentă a două triunghiuri  $ABC$  și  $DEF$  vom înțelege precizată și corespondența



biunivocă între vîrfurile lor al cărei grafic este  $\{(A, D), (B, E), (C, F)\}$  și care ne permite să vorbim despre „elemente corespunzătoare”.

**Definiția 4.1.** Două triunghiuri  $ABC$ ,  $A'B'C'$  se numesc congruente, dacă laturile corespunzătoare sînt congruente.

**Propoziția 4.2.** Relația de congruență a triunghiurilor este o echivalență.

Proprietatea rezultă din definiția 4.1 și teorema 4.1.

**Teorema 4.3.** (Cazul LUL). Dacă triunghiurile  $ABC$ ,  $A'B'C'$  au proprietatea  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$ , atunci ele sînt congruente.

**Demonstrație.** Fie prin absurd  $BC \not\equiv B'C'$ . Conform  $\text{III}_1$  va exista  $D$  pe  $(B'; C')$  încît  $BC \equiv B'D$ . Conform  $\text{III}_5$  urmează  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'AD}$  și prin axioma  $\text{III}_3$  rezultă că semidreptele  $[A'; D)$  și  $[A'; C')$  coincid, deci  $D \in (A'C')$ . Urmează că  $D$  coincide cu  $C'$ , în contradicție cu presupunerea făcută etc.

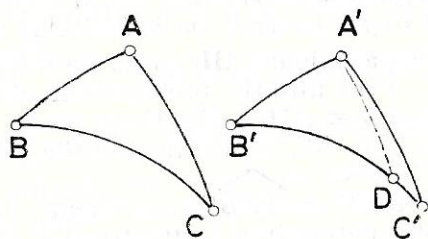


Fig. 6

**Teorema 4.4.** (Cazul ULU). Dacă triunghiurile  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , au proprietatea  $BC \equiv B'C'$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ ,  $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ , atunci ele sînt congruente.

**Demonstrație.** Vom arăta că  $BA \equiv B'A'$ . Presupunem contrariul,  $BA \not\equiv B'A'$ . Fie  $D$  pe  $[B'; A')$  așa ca  $BA \equiv B'D$ . Din triunghiurile  $BAC$ ,  $B'DC'$  rezultă  $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'D}$  și, conform  $\text{III}_3$ ,  $D \in (A'C')$  ce implică  $D = A'$  etc.

Un triunghi  $ABC$  cu proprietatea  $AB \equiv AC$  se numește *isoscel*. Se demonstrează imediat:

**Propoziția 4.3.** Dacă în triunghiul  $ABC$  avem  $AB \equiv AC$ , atunci  $\hat{B} \equiv \hat{C}$ .

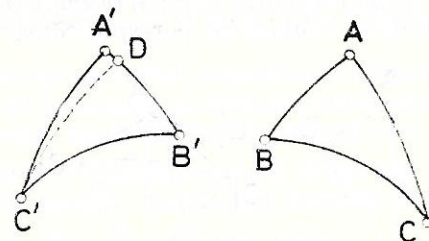


Fig. 7

**Propoziția 4.4.** (Diferența unghiurilor). Fie  $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$ ,  $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$  și  $D' \in \text{Int } \widehat{B'A'C'}$ . Dacă  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ , atunci  $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'A'C'}$  (și reciproc).

**Demonstrația** consideră (conform  $\text{III}_1$ )  $E$  pe  $(A'; B')$  încît  $AB \equiv A'E$  și  $F$  pe  $(A'; C')$  încît  $AC \equiv A'F$ . Propoziția 3.4 asigură existența unui punct  $G \in (A'; D') \cap [EF]$ . Triunghiurile  $ABC$  și  $A'EF$  sînt congruente (cazul LUL), deci  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'EF}$ ,  $BC \equiv EF$  și

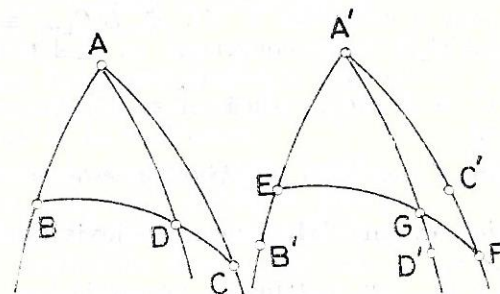


Fig. 8

$\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'FE}$ . Rezultă  $\triangle DAB \equiv \triangle GA'E$  (cazul ULU), deci  $BD \equiv EG$ . Implicația (4.1) conduce la  $DC \equiv GF$ . Concluzia enunțată apare prin aplicarea axiomei  $\text{III}_5$  triunghiurilor  $CAD$  și  $FA'G$ .



Reciproca se demonstrează ușor, prin reducere la absurd, și merită titulatura „suma unghiurilor”.

Una dintre consecințele importante ale considerațiilor făcute până acum este dată de:

**Teorema 4.5.** (Cazul LLL). *Dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  sînt congruente, atunci unghiurile corespunzătoare sînt congruente.*

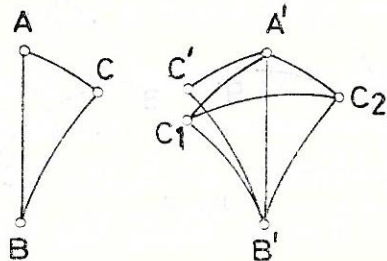


Fig. 9

*Demonstrație.* Să presupunem  $\hat{A} \neq \hat{A}'$ . Considerăm unghiurile  $C_1A'B'$ ,  $C_2A'B'$  congruente cu unghiul  $A$  și aflate în semiplane diferite definite de dreapta  $B'A'$  în planul triunghiului  $A'B'C'$ . Ceva mai mult, putem presupune că punctele  $C_1$  și  $C_2$  sînt alese astfel ca  $AC \equiv A'C_1 \equiv A'C_2$ . Triunghiurile  $A'C_2C'$  și  $B'C_2C'$  fiind isoscele,

$\hat{A'C_2C'} \equiv \hat{A'C'C_2}$ ,  $\hat{B'C_2C'} \equiv \hat{B'C'C_2}$ . Se constată atunci, aplicînd propoziția 4.4 (sau o reciprocă a ei), că  $\hat{B'C_2A'} \equiv \hat{B'C'A'}$ . După teorema 4.3,  $\triangle A'C_2B'$  este congruent cu  $\triangle A'C'B'$ . Urmează că  $\hat{C_2A'B'} \equiv \hat{B'A'C'} \equiv \hat{B'A'C_1}$ , adică  $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ , în contradicție cu ipoteza adoptată.

**Teorema 4.6.** *Congruența unghiurilor este o relație de echivalență.*

*Demonstrație.* Axioma III<sub>1</sub> asigură reflexivitatea. Presupunînd

apoi  $\hat{AOB} \equiv \hat{A'O'B'}$  nu restringem generalitatea dacă acceptăm  $OA \equiv O'A'$  și  $OB \equiv O'B'$ . Conform cazului LUL deducem  $\triangle AOB \equiv \triangle A'O'B'$  deci  $AB \equiv A'B'$ . Avînd în vedere că relația de congruență a segmentelor este reflexivă aplicăm cazul LLL pentru  $\triangle A'O'B'$

și  $\triangle AOB$ ; deducem  $\hat{A'O'B'} \equiv \hat{AOB}$  și am dovedit astfel simetria congruenței unghiurilor. O tehnică analoagă a încorporării unghi-

rilor congruente în triunghiuri congruente ne permite să transferăm proprietatea de tranzitivitate a congruenței de la segmente la unghiuri și să încheiem demonstrația.

Atragem atenția asupra caracterului unitar al grupei al III-lea de axiome, proprietățile majore ale relațiilor între segmente și respectiv unghiuri edificîndu-se treptat prin implicații logice cu sensuri ce alternează.

Un număr de proprietăți elementare în care intervin segmente și unghiuri pot fi enunțate și demonstrate ușor. Noțiunile de unghiuri opuse la vîrf, unghiuri suplimentare sînt cele curente.

**Definiția 4.2.** Se numește *unghi drept* un unghi congruent cu suplimentul său. Laturile unui unghi drept se numesc *perpendiculare*.

**Teorema 4.7.** *Există unghiuri drepte.*

Fie  $a$  o dreaptă în planul  $\alpha$ ,  $[O; A)$  o semidreaptă a ei și  $[O; B)$ ,

$[O; B')$  două semidrepte pentru care  $\hat{AOB} \equiv \hat{AOB'}$ ,  $OB \equiv OB'$ ,  $B \neq B'$ . Cu alte cuvinte semidreptele  $[O; B)$  și  $[O; B')$  sînt în cele două semiplane definite de  $a$  în planul  $\alpha$ . Dreapta  $BB'$  taie  $a$  într-un punct  $D$ .  $DB$  este perpendiculară pe  $a$ . Într-adevăr, triunghiurile  $ODB$  și  $ODB'$  sînt congruente, deci  $\hat{ADB} \equiv \hat{ADB'}$ , q.e.d.

*Observație.* S-ar putea întîmpla ca ilustrația din figura 10 să nu pară prea convingătoare deoarece „prejudecățile” ce le avem ne împiedică să „vedem”  $OB \equiv OB'$ . Vom constata însă ulterior că putem completa convenția de desenare a dreptelor cu o anumită convenție de „apreciere a lungimilor” în raport cu care să aibă loc  $OB \equiv OB'$ . O remarcă analoagă se poate face și referitor la congruențele de unghiuri. Repetăm însă că, în studiul axiomaticii geometriei, ilustrațiile nu au nici un rol și figurile noastre, mai puțin uzuale, sînt destinate în primul rînd să demonstreze această independență.

Considerăm cunoscută definiția pentru perpendicularitatea unei drepte pe un plan și criteriul ei de verificare.

Nu prezentăm demonstrațiile următoarelor patru propoziții deoarece acestea nu implică dificultăți conceptuale.

1° Toate unghiurile drepte sînt congruente.

2° Printr-un punct exterior unei drepte, în planul deținut de acel punct și acea dreaptă se poate duce o singură perpendiculară pe dreapta considerată.

3° Fiecare segment are un mijloc unic.

4° Fiecare unghi are o bisectoare unică.

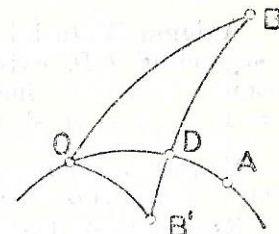


Fig. 10



Definițiile adunării și scăderii segmentelor și unghiurilor, precum și a relației de „mai mic” între segmente sau unghiuri sînt cele cunoscute.

**Teorema 4.8.** *Un unghi exterior unui triunghi este mai mare decît fiecare dintre unghiurile interioare neadiacente lui.*

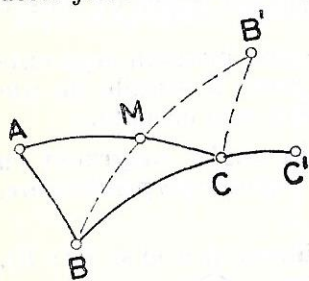


Fig. 11

*Demonstrație.* Fie  $\triangle ABC$  un triunghi și  $C'$  un punct cu proprietatea  $B-C-C'$ . Avem de arătat că unghiul  $C'CA$  este mai mare decît unghiul  $A$  și, de asemenea, este mai mare decît unghiul  $B$ . Dovedim afirmația pentru unghiul  $A$ . Fie  $M$  mijlocul lui  $AC$  și  $B'$  simetricul lui  $B$  față de  $M$ . Atunci  $B'$  este interior unghiului  $C'CA$ . Triunghiurile  $MB'C$  și  $MBA$  sînt congruente. Urmează că  $\angle A < \angle ACB' \equiv \angle ACC'$ , q.e.d.

Desigur, noțiunea de congruență a triunghiurilor se poate extinde la figuri oarecare. Se pot considera apoi transformări biunivoce ale spațiului care duc figuri congruente în figuri congruente și se pot stabili proprietățile lor grupale. Dar problemele depășesc cadrul acestui capitol.

## § 5. GRUPA A IV-A DE AXIOME

Cuprinde două axiome, numite axiomele de continuitate.

**Axioma IV<sub>1</sub>** (a lui Arhimede). Oricare ar fi segmentul nenul  $AB$  și segmentul  $CD$ , există  $n \in \mathbb{N}^*$  și punctele  $C_0, C_1, \dots, C_n$  pe semidreapta  $[C; D]$  încît  $C_0 = C$ ,  $C_{i-1} - C_i = C_i - C_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) și  $D = C_{n-1}$  sau  $C_{n-1} - D = C_n$ .

Pe scurt, axioma mai poate fi formulată astfel: „date segmentul nenul  $AB$  și segmentul  $CD$ , există  $n \in \mathbb{N}^*$  încît  $nAB > CD$ ”.

Este clar că dacă atribuim simbolului  $nAB$  semnificația uzuală, cele două formulări sînt echivalente.

**Axioma IV<sub>2</sub>** (a lui Cantor). Pentru orice șir infinit de segmente  $\{A_n B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ale unei drepte  $a$ , cu proprietatea că  $A_i B_i$  este inclus în interiorul segmentului  $A_{i-1} B_{i-1}$  pentru toți  $i = 1, 2, 3, \dots$  și nu există un segment care să se găsească în interiorul tuturor segmentelor din șirul considerat, există pe  $a$  un punct  $M$  care aparține interiorului fiecărui segment din șir.

**Propoziția 5.1.** *Punctul  $M$  care figurează în axioma lui Cantor este unic.*

Într-adevăr, dacă ar exista  $M$  și  $M'$  cu proprietatea din enunțul axiomei lui Cantor și  $M \neq M'$ , ar urma că segmentul  $MM'$  este interior tuturor segmentelor  $A_i B_i$ , absurd.

**Definiție 5.1.** Fie  $a$  o dreaptă orientată. Se numește *sistem cartezian de coordonate* pe  $a$  o aplicație  $f: a \rightarrow \mathbb{R}$  care are proprietățile:

- numerele 0 și 1 sînt în  $\text{Im } f$ ;
- $f$  este monoton crescătoare;
- două segmente orientate  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  ale dreptei  $a$  sînt congruente și la fel orientate dacă și numai dacă  $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$ .

Consecință:

**Propoziția 5.2.** *Dacă  $f: a \rightarrow \mathbb{R}$  este un sistem de coordonate pe dreapta orientată  $a$ , atunci  $f$  este injectivă.*

Fie punctele  $O = f^{-1}(0)$  și  $E = f^{-1}(1)$ . Primul este numit *origine*, iar al doilea *punctul unitate* pentru sistemul de coordonate  $f: a \rightarrow \mathbb{R}$ . Avem  $O < E$  pe dreapta orientată  $a$ .

Dacă  $P$  este un punct al dreptei  $a$ , numărul  $x = f(P)$  se numește *coordanata* lui  $P$ . Dacă  $P$  aparține semidreptei pozitive  $[O; E)$ , atunci  $x > 0$ ; dacă  $P = O$ , atunci  $x = 0$ ; dacă  $P$  aparține semidreptei deschise negative,  $x < 0$ .

Are loc următorul rezultat important, a cărui demonstrație se bazează pe completitudinea cîmpului numerelor reale  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 5.1.** *Fie  $a$  o dreaptă orientată și  $O < E$  două puncte fixate pe  $a$ . Atunci:*

- Există un singur sistem cartezian de coordonate  $f: a \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea  $f(O) = 0$ ,  $f(E) = 1$ ;
- $f: a \rightarrow \mathbb{R}$  este aplicație bijectivă.

*Demonstrație.* 1° Vom dovedi afirmația bazîndu-se numai pe axiomele din grupele I, II, III și pe IV<sub>1</sub>. Ultima parte a teoremei cere neapărat satisfacerea și a axiomei IV<sub>2</sub>.

Vom construi, prin procedeele obișnuite, un sistem cartezian de coordonate.

Fie  $P$  un punct oarecare al dreptei  $a$ ; dacă  $P = O$ , vom defini direct  $f(P) = 0$ .

Dacă  $O < P$ , considerăm șirul de puncte  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  așa ca  $P_0 = O$ ,  $P_0 < P_1 < P_2 < \dots$  și  $P_n P_{n+1} \equiv OP$ . După axioma lui Arhimede pentru orice indice  $n$  există un număr natural unic  $a_n$  încît

$$a_n \cdot OE \leq OP_n < (a_n + 1) \cdot OE.$$



Înmulțim această relație cu un număr natural  $m > 0$  și observăm că  $m \cdot OP_n = OP_{mn}$ ; deducem dubla inegalitate:  $ma_n \cdot OE \leq OP_{mn} < m(a_n + 1)OE$ . Acum avem și  $a_{mn} \cdot OE \leq OP_{mn} < (a_{mn} + 1)OE$ ; în baza alegerii lui  $a_{mn}$  rezultă  $ma_n \leq a_{mn} \leq m(a_n + 1)$ . După împărțirea prin  $m \cdot n > 0$ , ultimele inegalități ne dau  $\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_{mn}}{mn} \leq$

$\leq \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n}$ , care implică  $0 \leq \frac{a_{mn}}{mn} - \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}$ . Schimbînd pe  $n$  cu  $m$ , avem și  $0 \leq \frac{a_{mn}}{m \cdot n} - \frac{a_m}{m} < \frac{1}{m}$ . Deducem imediat:

$$\left| \frac{a_m}{m} - \frac{a_n}{n} \right| < \frac{2}{N}, \quad (N = \min(m, n) + 1).$$

Ultima inegalitate asigură că  $\frac{a_n}{n}$  este șir Cauchy de numere raționale, deci va admite o limită în  $\mathbb{R}$ ; vom lua prin definiție  $P(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .

Dacă are loc  $P < O$  considerăm simetricul său  $P'$  față de  $O$  și definim  $f(P) = -f(P')$ , încheind construcția funcției  $f: a \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pentru a dovedi că  $f$  constituie sistem cartezian de coordonate se impune verificarea condițiilor a), b), c) din definiția 6.1.

Condiția a) este evident satisfăcută (cu precizările din cuprinsul concluziei 1°) deoarece am definit  $f(O) = 0$  iar dacă particularizăm  $P = E$  vom găsi  $a_n = n$  pentru orice  $n$  din  $\mathbb{N}^*$ ; rezultă  $f(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$ .

Verificăm condiția b) considerînd singurul caz interesant  $O < P < Q$ . Presupunînd că prin înlocuirea lui  $P$  prin  $Q$  șirul  $(a_n)$  se înlocuiește prin  $(b_n)$ , din  $P < Q$  vom deduce

$$a_n \cdot OE \leq OP_n < OQ_n < (b_n + 1) \cdot OE,$$

deci  $a_n < b_n + 1$ . Urmează  $f(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 1}{n} = f(Q)$ ,

deci  $f(P) \leq f(Q)$ . A fost dovedită astfel monotonia funcției  $f$ .

Vom prezenta doar o schiță de demonstrare a condiției c). Făcînd renotări convenabile de puncte va fi suficient să dovedim:

$$(*) \quad (AB \equiv OD \text{ și } A < B \text{ și } O < D) \Rightarrow f(B) - f(A) = f(D).$$

Fie  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(d_n)$  șirurile asociate cînd  $P$  coincide cu  $A$ ,  $B$ , respectiv  $D$ . Din  $AB \equiv OD$  urmează pentru orice număr natural  $n$  inegalitățile:

$$d_n \cdot OE + a_n \cdot OE \leq OD_n + OA_n = OB_n < (b_n + 1) \cdot OE \quad \text{și}$$

$$b_n \cdot OE \leq OB_n = OD_n + OA_n < (d_n + 1) \cdot OE + (a_n + 1) \cdot OE.$$

Reținem de aici  $d_n + a_n < b_n + 1 < d_n + a_n + 3$ . După împărțire prin  $n$  și trecere la limită se obține concluzia implicației (\*).

Fie  $g$  un sistem arbitrar de coordonate pe  $a$  încît  $g(O) = 0$  și  $g(E) = 1$ . Pentru  $O < P$ ,  $OP$  și  $\overline{P_{n-1}P_n}$  sînt congruente și la fel orientate; folosind c), dovedim prin inducție completă:  $g(P_n) = n \cdot g(P)$ . Urmează imediat  $a_n \leq g(P_n) = n \cdot g(P) < a_n + 1$ . Împărțind prin  $n$  și trecînd la limită obținem (pentru  $O < P$ )  $g(P) = f(P)$ . Dacă  $P < O$  și  $P'$  este simetricul lui  $P$  față de  $O$ , folosind din nou c), constatăm  $g(P) = -g(P')$ ; urmează imediat și în acest caz  $g(P) = f(P)$ , egalitate ce asigură unicitatea sistemului cartezian de coordonate  $f$  în condițiile enunțate.

2° Pentru a dovedi că aplicația  $f: a \rightarrow \mathbb{R}$  mai sus construită este bijecție este suficient să arătăm că  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ .

Să considerăm pentru fiecare număr natural  $p$  punctul  $E^p$  al dreptei  $a$  definit recursiv prin condițiile:  $E^0 = E$  și  $E^{p+1}$  este mijlocul segmentului  $OE^p$ . Se constată ușor că are loc  $f(E^p) = 2^{-p}$ . Pentru un număr natural  $n$  putem considera și punctul  $E_n^p$ , unde  $OE_n^p = n \cdot OE^p$ . Rezultă imediat  $f(E_n^p) = n \cdot 2^{-p}$ .

Fie  $u$  un număr real arbitrar; avînd în vedere că în  $\mathbb{R}$  are loc axioma lui Arhimede, pentru orice număr natural  $p$  vom determina un număr natural unic  $z_p$  încît  $z_p \leq u \cdot 2^p < z_p + 1$ . Pe baza notației provizorii  $n = z_p$  definim punctele  $A_p = E_n^p$  și  $B_p = E_{n+1}^p$ .

Am construit astfel un șir de segmente închise  $A_p B_p$  (pentru  $p$  arbitrar în  $\mathbb{N}$ ) ce se constată ușor că verifică ipotezele axiomei lui Cantor; fie  $M$  punctul interior tuturor acestor segmente. Urmează pentru orice  $p$  din  $\mathbb{N}$ :

$$f(A_p) = z_p \cdot 2^{-p} \leq u < (z_p + 1) 2^{-p} < f(B_p) \quad \text{și}$$

$$f(A_p) \leq f(M) \leq f(B_p).$$



Cînd  $p$  tinde la infinit urmează  $f(M) = u$  și am dovedit astfel că  $\mathbf{R}_+$  este inclus în  $f(a)$ . Pentru un număr real negativ  $v$  vom găsi ca mai sus  $M'$  încît  $f(M') = -v$  și luînd  $M$  drept simetric al lui  $M'$  față de  $O$  urmează  $f(M) = v$  etc. Am dovedit astfel că aplicația  $f$  este surjectivă și, conform celor de mai sus, bijectivă.

**Corolar.** Orice sistem cartezian  $f: a \rightarrow \mathbf{R}$  este o asemănare.

*Observație.* În absența axiomei  $\text{IV}_2$ ,  $f(a)$  este o submulțime  $\mathbf{K}$  a lui  $\mathbf{R}$  ce se dovedește ușor că este subcorp, independent de alegerea dreptei  $a$  și a punctelor ei  $O, E$ . Ca în demonstrația de mai sus, putem constata prezența în  $\mathbf{K}$  a tuturor numerelor de forma  $a \cdot 2^{-p}$  cu  $a$  întreg și  $p$  natural; deducem și o limitare inferioară,  $Q_2$ , pentru corpul  $\mathbf{K}$ . O limitare inferioară mai precisă va fi pusă în evidență în § 8 prin considerarea corpului pitagoreic  $\Omega$ . (Vezi și [72, cap. 19]).

Aplicațiile ultimei teoreme sînt numeroase și utile. Dintre ele remarcăm numai noțiunea de măsură a segmentelor, existența și unicitatea ei.

**Definiția 5.2.** Se numește măsură a segmentelor o aplicație  $m: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$  de la mulțimea  $\mathcal{S}$  a segmentelor la mulțimea numerelor reale nenegative, care satisface condițiile:

- 1° Pentru un segment nul  $AA$ , avem  $m(AA) = 0$ ;
- 2° Există un segment nenul  $AB$ , pentru care  $m(AB) = 1$ ;
- 3° Dacă  $AB \equiv CD$ , atunci  $m(AB) = m(CD)$  și reciproc;
- 4° Dacă  $A-B-C$ , atunci  $m(AC) = m(AB) + m(BC)$ .

Presupunînd că aplicația  $m$  există, un segment nenul  $AB$  cu proprietatea  $m(AB) = 1$  se numește *unitate de măsură*; numărul  $m(CD)$  se numește *măsura segmentului  $CD$  sau lungimea lui  $CD$  măsurată cu unitatea de lungime  $AB$* .

**Teorema 5.2.** 1° Există o singură măsură a segmentelor, pentru care unitatea de măsură este dată a priori.

2° Pentru orice număr real  $\alpha \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$  există un segment  $CD$  a cărui măsură în raport cu o unitate dată este numărul  $\alpha$ .

*Demonstrație.* Vom demonstra 1° fără a folosi axioma lui Cantor. Datorită condiției 3° din definiția 5.2, putem admite că toate segmentele considerate aparțin unei drepte  $a$ . Fixăm pe  $a$  o orientare dînd o semidreaptă (orientată pozitiv) de origine  $O$ . Fie  $E$  un punct pe această semidreaptă astfel încît  $OE$  să fie congruent cu unitatea de măsură dată. Dacă  $f: a \rightarrow \mathbf{R}$  este sistemul cartezian de coordonate pe dreapta orientată  $a$ , unic determinat prin condiția  $f(O) = 0$ ,  $f(E) = 1$ , atunci aplicația  $m: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$  definită prin

$$(5.1) \quad m(AB) = |f(B) - f(A)|, \quad \forall AB \in \mathcal{S}$$

satisface definiția 5.2. Aceasta probează existența lui  $m$ . Dovedim unicitatea măsurii  $m$  prin reducere la absurd. Fie  $m' \neq m$  cu proprietatea 1°–4° și astfel încît  $m'(OE) = 1$ . Să considerăm aplicația  $g: a \rightarrow \mathbf{R}$  dată de

$$(5.2) \quad g(P) = \begin{cases} m'(OP) & \text{dacă } 0 < P, \\ 0 & \text{dacă } 0 = P, \\ -m'(OP) & \text{dacă } P < 0. \end{cases}$$

Se remarcă imediat faptul că  $g$  este un sistem cartezian de coordonate pe  $a$  și  $g(O) = 0$ ,  $g(E) = 1$ . Din teorema 6.1 avem  $g = f$ . Dar atunci (5.1) și (5.2) cu  $g = f$  dau  $m' = m$ , în contradicție cu  $m' \neq m$ .

2° Dacă  $\alpha = 0$ , atunci  $m(OO) = 0$ . Dacă  $\alpha > 0$ , fie  $P$  punctul dreptei cu proprietatea  $f(P) = \alpha$ . Din (5.1) avem  $m(OP) = |f(P) - f(O)| = f(P) = \alpha$ , q.e.d.

Aplicînd metode clasice putem determina o măsură a unghiurilor, alegînd de exemplu ca unitate de măsură, unghiul drept. Nu insistăm asupra acestor probleme.

**Definiția 5.3.** Numim *geometrie absolută* teoria axiomatică semiformalizată formată din noțiunile, relațiile primare și grupele I–IV de axiome.

Denumirea de geometrie absolută a fost dată de Janoš Bolyai: Geometria absolută constituie partea comună geometriilor euclidiană și hiperbolică.

## § 6. GRUPA A V-A DE AXIOME

Această grupă cuprinde o singură axiomă, numită axioma paralelelor.

**Definiția 6.1.** Două drepte  $a$  și  $b$  se numesc *paralele* dacă ele aparțin aceluiași plan și nu au nici un punct comun sau coincid. Se notează cu  $a \parallel b$  paralelismul dreptelor  $a$  și  $b$  și cu  $a \nparallel b$  negația sa.

Un prim rezultat care aparține geometriei absolute este dat de:

**Teorema 6.1.** În planul determinat de o dreaptă  $a$  și un punct  $A$  care nu-i aparține, există o paralelă prin punctul  $A$  la dreapta  $a$ .

*Demonstrație.* Fie  $\alpha$  planul determinat de  $a$  și  $A$ . În  $\alpha$ , perpendiculara din  $A$  pe  $a$  taie  $a$  în punctul  $B$ . Avem  $A \neq B$ . Perpendiculara  $b$  în  $A$  pe dreapta  $AB$ , aflată în planul  $\alpha$ , este paralelă cu dreapta  $a$ .



În caz contrar, fie  $D$  intersecția dreptelor  $a$  și  $b$ . În triunghiul  $DAB$  unghiul  $DBA$  este congruent cu unghiul exterior lui  $A$ , absurd în baza teoremei 5.7, q.e.d.

Dreapta  $b$  obținută prin construcția din demonstrația precedentă se numește *paralela canonică* prin punctul  $A$  la dreapta  $a$ .

Dacă prin  $A$  nu mai există alte paralele la  $a$ , atunci paralela canonică se numește pe scurt *paralela* prin  $A$  la  $a$ . Putem observa deci că avem un procedeu simplu (dat în demonstrarea teoremei precedente) de a determina o paralelă canonică, (paralela, când e cazul) prin punctul  $A$  la dreapta  $a$ , ( $A \notin a$ ).

Drept consecință a acestei teoreme reținem și

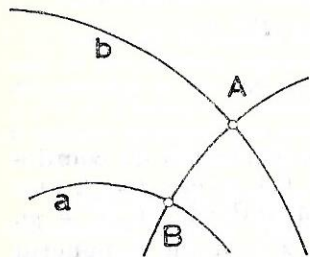


Fig. 12

**Teorema 6.2.** *Există drepte paralele distincte.*

Fie acum  $a$  și  $b$ , două drepte distincte dintr-un plan  $\alpha$  și  $c$  o dreaptă, care secționează  $a$  și  $b$  în puncte distincte. Adoptăm atunci denumirile uzuale pentru unghiurile determinate de  $c$  cu dreptele  $a$  și  $b$ : „alterne interne”, „alterne externe”, „corespondente” etc.

**Teorema 6.3.** *Dacă două drepte dintr-un plan tăiate de o secantă formează cu aceasta unghiuri alterne interne congruente, atunci acele două drepte sînt paralele.*

În baza teoremei 4.7, demonstrația proprietății enunțate este imediată.

Pentru a fixa geometria de care ne ocupăm va trebui să discernem între două alternative. Dacă în planul  $\alpha$  definit de dreapta  $a$  și punctul  $A$  ( $A \notin a$ ) există o singură paralelă prin  $A$  la  $a$ , sau există mai multe paralele.

Cum se va vedea, fiecare dintre aceste afirmații este independentă de axiomele geometriei absolute, prin urmare fiecare dintre ele, împreună cu celelalte axiome expuse pînă acum, dă un sistem axiomatic care merită întreaga atenție. Ne ocupăm în acest capitol de primul caz.

#### GRUPA A V-A DE AXIOME

**Axioma V.** *Printr-un punct  $A$  exterior unei drepte  $a$ , (în planul determinat de  $A$ ,  $a$ ) există cel mult o paralelă la dreapta  $a$ .*

Conform teoremei 6.2, avem consecința:

**Teorema 6.4.** *Fie  $A$  un punct oarecare și  $a$  o dreaptă, oarecare în care punctul  $A$  nu aparține. Atunci (în planul determinat de  $A$ ,  $a$ ) există o singură dreaptă  $b$  prin punctul  $A$  paralelă cu dreapta  $a$ .*

**Definiția 6.2.** Se numește *geometrie euclidiană* teoria axiomatică semi-formalizată a sistemului axiomatic al lui Hilbert, expus în prezentul capitol.

Din conținutul geometriei euclidiene remarcăm câteva rezultate importante.

**Teorema 6.5.** *Dacă  $a \parallel b$  și  $c$  este secantă la  $a$  și  $b$ , atunci unghiurile alterne interne determinate sînt congruente.*

*Demonstrație.* Fie  $a \neq b$  și  $c$  secantă la  $a$  în  $A$  și secantă la  $b$  în  $B$ . Presupunind prin absurd că unghiurile alterne interne definite de  $c$  cu  $a$  și  $b$  nu sînt congruente, considerăm prin  $B$  dreapta  $b'$  din plan, care face cu  $c$ , împreună cu  $a$ , unghiuri alterne interne egale. După teorema 6.3 urmează  $b' \parallel a$ . Deoarece și  $b \parallel a$  iar  $b$ ,  $b'$  trec prin  $B$  și  $b \neq b'$ , ar urma că prin punctul  $B$  se pot duce în planul considerat două paralele distincte la dreapta  $a$ . Absurd, după teorema 6.4, q.e.d.

**Teorema 6.6.** *În orice triunghi  $ABC$  suma unghiurilor  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$  este egală cu două unghiuri drepte.*

*Demonstrație.* Fie  $(AD)$  paralelă prin  $A$  la  $BC$ ,  $D$  fiind în alt semiplan delimitat de  $(AB)$  decît  $C$ . Fie și  $E$  în cît  $D - A - E$ .

Prin teorema 6.5 deducem  $\hat{B} \equiv \hat{BAD}$  și  $\hat{C} \equiv \hat{CAE}$  în cît  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{DAB} + \hat{BAC} + \hat{CAE} = 2dr$ , q.e.d.

Atragem atenția că figura 13 ce ilustrează demonstrația este executată în mod tradițional, procedeul folosit la figurile anterioare devenind inacceptabil după adoptarea axiomei V.

De-a lungul anilor au existat numeroase tentative de a dovedi, în cadrul geometriei absolute, aserțiunea cuprinsă în axioma a V-a. Ele s-au soldat cu eșecuri, deoarece, așa cum se va vedea, sistemul de axiome considerat este minimal. Au avut totuși o calitate, aceea de a stabili *propoziții echivalente cu postulatul paralelelor* dat de axioma V.

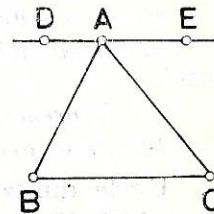


Fig. 13



Enumerăm aici pe cele mai importante :

1° Propoziția din enunțul teoremei 6.3.

2° (Postulatul lui Euclid). Dacă două drepte distincte dintr-un plan tăiate de o secantă formează cu aceasta unghiuri alterne și de aceeași parte a secantei cu suma mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se intersectează de acea parte a secantei, unde proprietatea menționată are loc.

3° Suma unghiurilor în orice triunghi este egală cu două unghiuri drepte.

4° Toate triunghiurile au aceeași sumă a unghiurilor.

5° Fiind dat un unghi ascuțit  $AOB$ , perpendiculara ridicată pe  $(OA)$  în orice punct  $M$  al semidreptei  $(O; A)$  taie  $(OB)$ .

6° Prin fiecare punct din interiorul unui anumit unghi se poate duce o dreaptă care taie ambele laturi ale unghiului, fără a trece prin vârful său.

7° Există un patrulater plan  $ABCD$  cu unghiurile  $\hat{A} \equiv \hat{B} = 1$  dr pentru care unghiurile  $\hat{C}$  și  $\hat{D}$  sînt de asemenea drepte.

(Patrulaterale plane  $ABCD$  cu unghiurile  $A$  și  $B$  drepte ce satisfac  $BC \equiv AD$  se numesc „patrulater Sacheri”).

8° Există un patrulater  $ABCD$  în plan cu toate unghiurile drepte. (Patrulaterale plane  $ABCD$  pentru care  $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} = 1$  dr se numesc „patrulater Lambert”).

9° (Proprietatea lui Farkas Bolyai) : Prin orice trei puncte necoliniare trece un cerc.

10° Există triunghiuri asemenea incongruente.

11° În plan, locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă  $a$  și aflate în unul dintre semiplanele determinate de  $a$  este o dreaptă.

12° Linia mijlocie a unui triunghi este congruentă cu jumătatea bazei.

13° Teorema lui Pitagora.

14° Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele.

Unele dintre aceste teoreme se dovedesc direct ușor, dar altele cu demonstrații laborioase. Nu insistăm asupra lor.

Istoria postulatului paralelelor are o vechime de peste două milenii. Problema a fost rezolvată abia în secolul trecut de către N. Lobacevski în Rusia, J. Bolyai în Transilvania și K. Fr. Gauss în Germania, dar convingerea generală asupra justetei soluției a mai întârziat o jumătate de secol. Descoperirea geometriilor neeuclidiene a constituit unul dintre momentele hotărîtoare ale dezvoltării întregii

matematicii. În filozofie ea a zdruncinat concepția kantiană asupra naturii spațiului fizic.

## § 7. METATEORIA AXIOMATICH LUI HILBERT

Pentru sistemul axiomatic semiformalizat al lui Hilbert vom efectua analiza metateoretică discutînd problemele necontradicției, minimalității, completitudinii și categoricității, expuse în capitolul III. Acceptînd necontradicția aritmeticii, ne vom folosi de întreaga construcție a cîmpului  $\mathbf{R}$  al numerelor reale pentru a determina modele care să dovedească necontradicția sau independența axiomeilor.

### PROBLEMA NECONTRADICȚIEI

Vom construi un model, notat cu  $\mathcal{G}$ , în care să interpretăm noțiunile și relațiile primare din geometria euclidiană și în care să fie verificate toate axiomele sistemului lui Hilbert.

Numim puncte din  $\mathcal{G}$  ternele ordonate de numere reale  $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$  și le notăm cu  $A = (x^i)$ ,  $B = (y^i)$  etc.

Pentru a defini dreptele și planele, fie  $\mathcal{M}$  mulțimea cuaternelor de numere reale  $(a_h) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  pentru care rang  $\|a_1 a_2 a_3\| = 1$ . Pentru  $(a_h), (b_h) \in \mathcal{M}$  vom pune

$$(a_h) \sim (b_h) \Leftrightarrow \exists \rho \in \mathbf{R}^*, a_h = \rho \cdot b_h, h = 1, 2, 3, 4.$$

Evident,  $\sim$  este o relație de echivalență. Notăm cu  $\mathbf{P} = \mathcal{M}/\sim$  elementele mulțimii  $\mathbf{P}$  se numesc plane în  $\mathcal{G}$  și le notăm cu  $\alpha = [a_h]$ ,  $\beta = [b_h]$  etc.

Fie  $\mathcal{D} = \left\{ ((a_h), (b_h)) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : \text{rang} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2 \right\}$ . Pe  $\mathcal{D}$  considerăm relația  $\approx$  dată de

$$((a_h), (b_h)) \approx ((a'_h), (b'_h)) \Leftrightarrow \left[ \exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right. \\ \left. \forall h = 1, 2, 3, 4, a'_h = \lambda_1 a_h + \lambda_2 b_h, b'_h = \mu_1 a_h + \mu_2 b_h \right].$$

Se constată ușor că  $\approx$  este o echivalență pe mulțimea  $\mathcal{D}$ . Fie  $\mathbf{D} = \mathcal{D}/\approx$ . Elementele mulțimii  $\mathbf{D}$  se numesc drepte în  $\mathcal{G}$  și se notează cu  $a = [(a_h); (b_h)]$ .



Definim relația de incidență pentru punctul  $A(x^i)$  și dreapta  $a = [(a_h); (b_h)]$  spunînd că are loc  $A \in a$  dacă și numai dacă au loc egalitățile:

$$(7.1) \quad \begin{cases} a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0, \\ b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4 = 0. \end{cases}$$

Cum

$$(7.2) \quad \text{rang} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 2$$

condiția (7.1) nu depinde de alegerea reprezentantului  $((a_h), (b_h))$  al lui  $a$ , ci numai de dreapta  $a$ . Dar (7.1) și (7.2), pentru  $(x^i)$  variabile, ne dau totalitatea punctelor dreptei  $a$ ; (7.1), (7.2) constituie *ecuațiile dreptei*  $a$ . Să observăm că ele pot fi scrise sub formă echivalentă

$$(7.3) \quad x^i = x_0^i + tm^i, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

în care  $m^i$  nu sînt toți nuli și sînt determinați pînă la un factor comun nenul, iar  $(x_0^i)$  este o soluție fixată a sistemului (7.1), (7.2).

De asemenea, definim relația de apartenență a unui punct  $A = (x^i)$  la un plan  $\alpha = [a_h]$  prin:  $A \in \alpha$  dacă și numai dacă

$$(7.4) \quad a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 = 0,$$

care împreună cu condiția

$$(7.5) \quad \text{rang} \|a_1 \ a_2 \ a_3\| = 1$$

arată că (7.4) nu depinde de reprezentantul  $(a_h) \in \mathcal{M}$  al planului  $\alpha$ , ci numai de planul  $\alpha$ .

Aplicînd tehnicile din geometria analitică putem demonstra ușor că axiomele din grupa I-a sînt verificate în  $\mathcal{G}$ .

Fie  $A_1 = (x_1^i)$ ,  $A_2 = (x_2^i)$ ,  $A_3 = (x_3^i)$  trei puncte ale unei drepte dată prin (7.3), pentru valorile  $t_1, t_2, t_3$  ale lui  $t$ :

$$x_1^i = x_0^i + t_1m^i, \quad x_2^i = x_0^i + t_2m^i, \quad x_3^i = x_0^i + t_3m^i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Vom spune că  $A_2$  se află între  $A_1$  și  $A_3$  dacă avem  $t_1 < t_2 < t_3$  sau  $t_1 > t_2 > t_3$ . Scriem aceasta ca  $A_1 - A_2 - A_3$ .

Prin calcul direct se probează fiecare axiomă din grupa a II-a.

Pentru noțiunile derivate ce apar prin consecințele acestei grupe de axiome prezentăm doar cîteva rezultate.

— A fixa o orientare pe dreapta furnizată de „ecuațiile parametrice” (7.3) revine la acceptarea amplificării „parametrilor directori”  $m^i$  doar prin factori reali pozitivi.

— O semidreaptă deschisă cu originea în punctul  $A(x_0^i)$  a dreptei orientate dată de ecuațiile (7.3) se dă prin fixarea semnului „parametrului”  $t$ . Semidreapta va fi închisă dacă se va permite lui  $t$  să ia și valoarea 0.

— Pentru planul  $[a_h]$ , un semispațiu delimitat de el îl constituie mulțimea punctelor  $A(x^i)$  ce satisfac inegalitatea  $a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4 > 0$ . Alegînd pentru planul considerat un alt reprezentant  $(b_h)$ , unde  $a_h = r \cdot b_h$  vom obține același semispațiu sau semispațiul opus înlocuind  $a_h$  prin  $b_h$  în inegalitatea menționată după cum  $r > 0$  sau  $r < 0$ .

— Un semiplan delimitat de dreapta  $[(a_h); (b_h)]$  în planul  $[a_h]$  este alcătuit din punctele  $A$  situate în planul  $[a_h]$  și într-un semispațiu delimitat de  $[b_h]$ .

Notăm acum cu  $d(A_1, A_2)$  și numim *distanță* dintre punctele  $A_1 = (x_1^i)$  și  $A_2 = (x_2^i)$ , numărul

$$(7.6) \quad d(A_1, A_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_1^i - x_2^i)^2}.$$

Vom spune că *segmentul*  $A_1A_2$  este *congruent* cu *segmentul*  $B_1B_2$  și scriem  $A_1A_2 \equiv B_1B_2$ , dacă și numai dacă  $d(A_1, A_2) = d(B_1, B_2)$ .

Fie apoi două semidrepte cu originea  $A_0 = (x_0^i)$  date de (7.3):

$$x^i = x_0^i + tm^i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{rang} \|m^1 \ m^2 \ m^3\| = 1, \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$x^i = x_0^i + tn^i, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{rang} \|n^1 \ n^2 \ n^3\| = 1, \quad (i = 1, 2, 3),$$

unde factorii cu care pot fi înmulțiți  $m^i$  și  $n^i$  sînt pozitivi. Numim *unghi* dintre cele două semidrepte, numărul  $V \in [0, \pi]$  dat de soluția ecuației

$$(7.7) \quad \cos V = \frac{m^1n^1 + m^2n^2 + m^3n^3}{\sqrt{(m^1)^2 + (m^2)^2 + (m^3)^2} \cdot \sqrt{(n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2}}.$$

Spunem atunci că *unghiurile*  $\widehat{h, k}$  și  $\widehat{h', k'}$  sînt *congruente* și notăm  $\widehat{h, k} \equiv \widehat{h', k'}$  dacă și numai dacă cosinusurile unghiurilor sînt egale.



Un calcul mai lung, echivalent de fapt cu edificarea geometriei analitice în spațiu, arată că toate axiomele din grupele I–V sînt verificate în  $\mathcal{G}$ .

În consecință:

**Teorema 7.1.** *Sistemul axiomatic, al lui Hilbert, al geometriei euclidiene este necontradictoriu.*

#### PROBLEMA INDEPENDENȚEI

Cum s-a văzut, începînd cu grupa a II-a, axiomele sistemului sînt formulate în baza axiomelor din grupele precedente și a consecințelor lor. Din acest motiv nu este posibil să studiem independența axiomelor în ansamblul lor.

În principiu aici putem să abordăm doar independența unei anumite axiome în raport cu axiomele din grupe ce nu sînt posterioare acelei axiome. Dintre cele douăzeci de modele ce ar trebui deci construite pentru a verifica independența fiecărei axiome de restul axiomelor „neafectate de ea”, vom prezenta aici doar cîteva modele ce le considerăm mai importante.

**Axioma lui Pasch** este independentă de axiomele  $I_1$ – $I_8$  și  $II_1$ ,  $II_2$ ,  $II_3$ . În adevăr, păstrînd modelul  $\mathcal{G}$ , utilizat mai sus eliminăm punctul  $(1, 0, 0)$ . Axiomele anterioare lui  $II_4$  sînt verificate în continuare. Fie însă  $A = (2, 0, 0)$ ,  $O = (0, 0, 0)$ ,  $C = (0, 2, 0)$  și dreapta  $a = [(0, 0, 1, 0); (1, 0, 0, 1)]$  ce trece prin mijlocul  $M = (1, 1, 0)$  al laturii  $AC$ . Dreapta  $a$  nu taie nici  $|AO|$  nici  $|OC|$  deși este în planul  $AOC = [0, 0, 1, 0]$ ;  $II_4$  nu este verificată deci este independentă de axiomele ce o preced.

Pentru independența axiomei  $III_5$  reluăm același model  $\mathcal{G}$ . Fie  $A = (x^i)$ ,  $B = (x^i + t^i)$ ,  $C = (x^i + u^i)$  puncte arbitrare; definim o distanță  $\delta$  și un unghi  $\ast$  înlocuind (7.6), (7.7) prin:

$$\delta(A, B) = \sqrt{(t^1 + t^2)^2 + (t^2)^2 + (t^3)^2} \text{ și}$$

$$\delta(A, B) \cdot \delta(A, C) \cdot \cos(\ast BAC) = t^1 u^1 + t^2 u^2 + t^3 u^3.$$

Redefinim în mod natural congruența  $\hat{=}$  prin  $AB \hat{=} CD \Leftrightarrow \delta(A, B) = \delta(C, D)$  și  $\widehat{BAC} \hat{=} \widehat{DEF} \Leftrightarrow (\ast BAC) = (\ast DEF)$ . Fie  $\mathcal{G}'$  interpretarea astfel construită. Verificarea axiomelor din grupele I și II în  $\mathcal{G}'$  se realizează identic ca în modelul  $\mathcal{G}$  așa cum am făcut cînd am dovedit necontradicția sistemului axiomatic al lui Hilbert. Verificarea axiomelor  $III_1$ – $III_4$  în modelul  $\mathcal{G}'$  se realizează fără

dificultăți. Pentru axioma  $III_5$  vom considera  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (2, 0, 0)$  și  $B = (0, 1, 0)$ . Pentru triunghiurile  $OAB$  și  $OBA$  vom constata ușor  $OA \hat{=} OB$ ,  $OB \hat{=} OA$  și  $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$  deci sînt îndeplinite ipotezele axiomei  $III_5$ . Se constată însă  $(\ast OBA) \neq (\ast OAB)$  deci  $III_5$  nu este satisfăcută, dovedindu-se independentă de axiomele ce o preced. Deoarece pentru formularea axiomelor din ultimele două grupe nu intervine  $III_5$  putem constata chiar independența globală a acestei axiome în sistemul lui Hilbert.

Pentru a dovedi independența axiomei lui Arhimede față de celelalte axiome, pornim de la următorul rezultat cunoscut, [95]: Există corpuri  $K$  total ordonate, care au cîmpul  $\mathbf{R}$  al numerelor reale ca subcorp propriu, sînt complete (orice șir Cauchy de elemente din  $K$  are limită în  $K$ ), dar nu sînt arhimediene. Un astfel de corp a fost construit de exemplu de Kolmogorov.

Fie atunci  $\mathcal{G}_K$  modelul construit cu ajutorul cîmpului  $K$  în același mod în care a fost construit modelul  $\mathcal{G}$  prin intermediul lui  $\mathbf{R}$ . Se vede ușor că în  $\mathcal{G}_K$  sînt satisfăcute toate axiomele (inclusiv axioma a V-a), dar nu este satisfăcută axioma  $IV_1$  a lui Arhimede. Pentru a justifica ultima afirmație, fie segmentul  $OA$  cu extremitățile  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (\alpha, 0, 0)$ ,  $\alpha > 0$  și segmentul  $OB$ , cu  $B = (\beta, 0, 0)$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  fiind alese așa fel încît nu există  $n \in \mathbf{N}^*$  pentru care  $n\alpha > \beta$ . Atunci nu există  $n \in \mathbf{N}^*$  încît  $nOA > OB$ , deoarece această inegalitate în  $\mathcal{G}_K$  echivalează cu  $n \cdot \alpha > \beta$ .

Independența axiomei lui Cantor,  $IV_2$ , de celelalte axiome se dovedește în același mod, considerînd modelul  $\mathcal{G}_\Omega$  în care  $\Omega$  este corpul construit în felul următor:  $\Omega$  este mulțimea de numere reale obținută aplicînd numărului 1, de un număr finit de ori operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire și extrageri de radicali de forma  $\sqrt[1]{1 + a^2}$ , în care  $a$  este un număr deja construit. Se obține un cîmp total ordonat, arhimedian care conține  $\mathbf{Q}$ , dar este subcorp propriu al corpului numerelor reale  $\mathbf{R}$ . Dar  $\Omega$  nu este un corp complet. În consecință, pe dreptele lui  $\mathcal{G}_\Omega$ , (de exemplu pe dreapta  $a = [(0, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 0)]$ , care este izomorfă cu  $\Omega$ ) axioma lui Cantor nu are loc.

În fine independența axiomei paralelelor din sistemul lui Hilbert va fi dovedită în capitolul VIII arătînd că geometria hiperbolică, care se obține ca teorie a sistemului axiomatic format din grupele I–IV din sistemele lui Hilbert și din negația axiomei V este necontradictorie.

Avem astfel:

**Teorema 7.2.** *Sistemul axiomatic al lui Hilbert al geometriei euclidiene este minimal.*



## PROBLEMA COMPLETITUDINII ȘI CATEGORICITĂȚII

**Teorema 7.3.** *Axiomatica lui Hilbert a geometriei euclidiene este completă.*

Pentru demonstrație este suficient, după propoziția 2.2, Cap. III, să arătăm :

**Teorema 7.4.** *Sistemul axiomatic al geometriei euclidiene este categoric.*

*Demonstrație.* Fie  $M$  un model pentru axiomatica lui Hilbert; urmează că în  $M$  se poate introduce un sistem de coordonate carteziene și atunci putem caracteriza analitic punctele, dreptele și planele lui  $M$ , exact ca în modelul  $\mathcal{G}$  de care ne-am servit în dovedirea necontradicției geometriei euclidiene. Atunci punctele, dreptele, planele și relațiile din  $M$  pot fi privite ca puncte, drepte, plane și relații din  $\mathcal{G}$ .

Obținem o corespondență biunivocă între  $M$  și  $\mathcal{G}$  care va păstra relațiile geometrice, deoarece în  $M$  și în  $\mathcal{G}$  avem aceeași geometrie analitică. Deci  $M$  și  $\mathcal{G}$  sînt izomorfe. Se scrie  $M \simeq \mathcal{G}$ . Fie  $M'$  un alt model pentru geometria euclidiană. Avem  $M' \simeq \mathcal{G}$ . Urmează  $M \simeq M'$ , relația de izomorfism  $\simeq$  fiind o echivalență pe mulțimea modelelor. Deci sistemul lui Hilbert este categoric, q.e.d.

Cu aceasta am încheiat problemele importante de metateorie a sistemului axiomatic al geometriei euclidiene.

*Observație.* Considerăm util să subliniem rolul special ce îl joacă axioma  $IV_2$  în asigurarea categoricității întregului sistem de axiome. În absența axiomei  $IV_2$  pentru modelul arbitrar  $M$  vom găsi un model izomorf cu un model analitic  $\mathcal{G}_K$ , unde  $K$  este un subcorp al lui  $\mathbb{R}$  ce satisface doar condiția de a fi stabil în raport cu aplicația  $f$  dată de  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ . În aceste condiții desigur modelele  $M$ ,  $M'$  nu vor mai fi izomorfe dacă nu sînt izomorfe corpurile corespunzătoare  $K$ , respectiv  $K'$ . Acesta este un motiv pentru care în formularea lui Hilbert grupele IV și V de axiome apar în ordine inversă față de cea expusă aici și formularea axiomei  $IV_2$  (notată la Hilbert  $V_2$ ) tînește direct categoricitatea : „Mulțimea punctelor nu admite nici o extensie efectivă în care să fie satisfăcute axiomele I, II, III, axioma lui Arhimede și axioma paralelelor”. Un alt motiv pentru care Hilbert plasează axiomele de continuitate în ultima grupă este că prin negarea axiomei paralelelor axiomele lui Arhimede și Cantor se obțin ca teoreme. Deci, în notația dată aici axiomele, pentru geometria neeuclidiană vom obține un sistem axiomatic necontradictoriu și minimal luînd grupele I, II, III și axioma  $\neg V$  : „Există un punct  $A$  neincident unei drepte  $a$  înct, există prin  $A$  cel puțin două drepte distincte fiecare paralelă cu  $a$ ”.

## SISTEMUL AXIOMATIC AL LUI BIRKHOFF

După cum am constatat în capitolul precedent, sistemul axiomatic al geometriei construit de Hilbert este riguros, precis dar deosebit de complex. Admirația matematicienilor față de acest sistem nu este însă pasivă; după Hilbert au apărut peste o sută de axiomatizări ale geometriei. Unele dintre aceste sisteme axiomatiche au scopul declarat de a micșora numărul noțiunilor și relațiilor primare pentru a obține o analiză metateoretică mai profundă. Alte sisteme axiomatiche regroupează axiomele pentru a obține treptat geometrii din ce în ce mai specializate pînă la atingerea geometriei euclidiene. În fine, există axiomatizări ale geometriei ce afișează un scop didactic : micșorarea numărului de axiome și simplificarea enunțurilor lor pentru o cit mai lesnicioasă înțelegere. Axiomatica lui Birkhoff aparține acestei ultime categorii. Ne îndreptăm atenția asupra acestui sistem axiomatic deoarece :

- didactica geometriei elementare este extrem de importantă;
- din punct de vedere istoric această axiomatizare precede altele;
- scopul ei didactic este bine realizat.

Literatura matematică în limba română nu a neglijat această axiomatică; lucrările [72] și mai ales [21] au o largă circulație și au stîrnit un interes legitim. Aici nu ne propunem o analiză detaliată ci doar încadrarea axiometriei lui Birkhoff ca teorie logico-deductivă și surprinderea conexiunilor bilaterale cu „axiomatica mamă” a lui Hilbert.

## § 1. CADRUL GENERAL \*

Sistemul axiomatic al lui Birkhoff presupune cunoscută anterior teoria (naivă) a mulțimilor și teoria numărului real. Din punct de vedere științific astfel de supoziții pot apărea ca hazardate dar din punct de vedere didactic sînt premise corecte și eficiente. Fiînd un sistem axiomatic semiformalizat va include și logica uzuală.

\* Precizăm că ne vom referi aici nu la formularea științifică a axiomelor lui Birkhoff ci la formulările ei didactice ce au circulație largă în țara noastră.



Noțiunile primare specifice sînt: *punct, dreaptă, plan, distanță, măsură*. *Punctele* vor fi privite ca elemente ale unei mulțimi  $S$  ce constituie „spațiul ambiant”; vor fi notate cu majuscule latine, eventual înscrise sau accentuate. O *dreaptă* este privită ca o mulțime de puncte și se va nota cu o literă latină mică; totalitatea dreptelor apare ca o mulțime inclusă în mulțimea părților lui  $S$ :  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(S)$ . *Planele*, notate cu litere grecești mici, vor alcătui o altă submulțime a lui  $\mathcal{P}(S)$  ce o vom nota prin  $\Pi$ . *Distanța* constituie o funcție  $d: S \times S \rightarrow \mathbf{R}$ ; atragem însă atenția că adoptarea denumirii de „distanță” pentru  $d$  nu presupune că am accepta *a priori* proprietăți specifice distanței. *Măsura* va fi privită ca o funcție  $m: \mathcal{U} \rightarrow [0, 180]$  dar domeniul ei de definiție, mulțimea  $\mathcal{U}$  a „unghiurilor”, se va construi pe parcurs, înaintea formulării axiomelor referitoare la  $m$ . Vom utiliza relația de apartenență ( $\in$ ), operații cu numere reale (+,  $\cdot$ ) sau relații binare asupra elementelor lui  $\mathbf{R}$  ( $=, \leq$ ) și diferite simboluri logice ( $\Rightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists$ ) dar nu le prezentăm ca relații primare deoarece nu aparțin părții specifice a acestui sistem axiomatic. Putem deci afirma că în cadrul axiomaticii lui Birkhoff geometria va apare drept o structură  $(S, \mathcal{L}, \Pi, d, m)$ .

## § 2. AXIOME ȘI PRINCIPALELE LOR CONSECINȚE

Vom nota axiomele cu simboluri  $B_i$ , unde  $B$  evocă numele matematicianului George Birkhoff iar indicele  $i$  permite numerotarea axiomelor. Vom întrerupe din cînd în cînd listarea axiomelor punînd în evidență noțiunile derivate, principalele consecințe și scurte comentarii. În general vom folosi aceleași notații ca în capitolul precedent. După prezentarea în cuvinte a fiecărei axiome vom da și o exprimare formală.

**$B_1$ .** Prin două puncte diferite trece o dreaptă și numai una.

$$\forall A, B \in S, A \neq B \Rightarrow \exists ! a \in \mathcal{L} : A \in a \wedge B \in a.$$

( $A$  se compara cu axiomele  $I_1$  și  $I_2$ ; dreapta  $a$  va fi notată cu  $(AB)$  sau, cînd nu vor fi posibile confuzii, cu  $AB$ ).

**$B_2$ .** Prin trei puncte necoliniare trece un plan unic.

$$\forall A, B, C \in S, \neg(\exists a \in \mathcal{L} : \{A, B, C\} \subset a) \Rightarrow \exists ! \alpha \in \Pi : \{A, B, C\} \subset \alpha.$$

**$B_3$ .** Dacă două puncte distincte sînt într-un plan, dreapta care le conține este inclusă în acel plan.

$$\forall A, B \in S, \forall \alpha \in \Pi : \{A, B\} \subset \alpha \Rightarrow (AB) \subset \alpha.$$

**$B_4$ .** Dacă două plane distincte au intersecție nevidă, atunci intersecția lor este o dreaptă.

$$\forall \alpha, \beta \in \Pi : \alpha \neq \beta \wedge \alpha \cap \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \cap \beta \in \mathcal{L}.$$

**$B_5$ .** Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.  $S$  conține cel puțin patru puncte necoplanare.

$$(\forall a \in \mathcal{L} \exists A, B \in S, A \neq B \wedge \{A, B\} \subset a) \wedge [\forall \alpha \in \Pi], A, B, C \in \alpha \wedge$$

$$\wedge \neg(\exists a \in \mathcal{L} : \{A, B, C\} \subset a) \wedge (\exists A, B, C, D \in S \forall \alpha \in \Pi :$$

$$\{A, B, C, D\} \not\subset \alpha).$$

Axiomele  $B_1$ — $B_5$  constituie *grupa axiomelor de apartenență*. Deși sînt numeric mai puține, aceste prime cinci axiome alcătuiesc un subsistem echivalent cu grupa axiomelor de incidență de la Hilbert.

Se introduce noțiunea derivată de *sistem de coordonate* pentru o dreaptă  $a$ : o funcție bijectivă  $f: a \rightarrow \mathbf{R}$  ce satisface condiția:

$$(2.1) \quad \forall P, Q \in a, |f(P) - f(Q)| = d(P, Q).$$

Vom considera și mulțimea  $SC(a)$  alcătuită din totalitatea sistemelor de coordonate pentru dreapta  $a$ .

**$B_6$ .** (axioma riglei). Orice dreaptă  $a$  admite cel puțin un sistem de coordonate.

$$\forall a \in \mathcal{L}, SC(a) \neq \emptyset.$$

Această axiomă foarte tare este specifică sistemului Birkhoff; ne reamintim că pentru a ne asigura de un rezultat analog în axiomatica lui Hilbert (vezi teorema 5.1, cap. V) a fost nevoie de grupele I, II, III, IV. În replică, vom constata ce multe dintre axiomele hilbertiene se pot deduce din axiomele  $B_1$ — $B_6$ .

**Teorema 2.1.** Funcția „distanță”  $d$  satisface condițiile:

- pentru orice  $P, Q$  are loc  $d(P, Q) \geq 0$ ;
- $d(P, Q) = 0$  dacă și numai dacă  $P = Q$ ;
- $d(P, Q) = d(Q, P)$ .

Într-adevăr, pentru  $P \neq Q$ , putem considera dreapta  $(PQ) = a$  și din (2.1) să deducem a), c) și  $d(P, Q) \neq 0$ . Pentru  $P = Q$  vom lua



$a$  arbitrară prin  $P$  (vezi și axioma  $B_5$ ) și tot prin (2.1) vom deduce  $d(P, Q) = 0$ , q.e.d.

*Observație.* Folosind doar axiomele  $B_1 - B_6$  încă nu putem dovedi că  $f$  este o distanță, adică satisface și „inegalitatea triunghiulară”  $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ . Această proprietate va rezulta ulterior din considerații geometrice. Pentru moment se poate dovedi această inegalitate doar în ipoteza suplimentară că punctele  $A, B, C$  sunt coliniare.

**Teorema 2.2.** („de așezare a riglei”). *Fiind date punctele  $O, A$  pe o dreaptă  $a$  există un sistem de coordonate  $h$  pentru  $a$  încît  $h(O) = 0$  și  $h(A) > 0$ .*

Într-adevăr, din  $f \in SC(a)$  urmează imediat că funcția  $g = -f$  și, pentru orice  $t$  real, funcția  $g_t = t + f$  sînt de asemenea în  $SC(a)$ . Pornind de la  $f$  arbitrar în  $SC(a)$  vom considera  $t = -f(0)$  și vom constata că pentru  $e \in \{-1, +1\}$  funcția  $h = e(t + f)$  este în  $SC(a)$ . Vom alege în final  $e$  încît  $h(A) = e[f(A) - f(0)]$  să fie pozitiv.

Se introduce relația ternară „a fi între” ca noțiune derivată: prin definiție punctul  $B$  este între punctele  $A$  și  $C$  dacă  $A, B, C$  sînt puncte coliniare distincte două câte două și  $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ . Se notează aceasta prin  $A - B - C$ .

**Teorema 2.3.** *Relația „a fi între” satisface axiomele  $II_1, II_2, II_3$  din axiomatica lui Hilbert. (Vezi cap. V, § 2).*

Verificarea este imediată cu ajutorul unui sistem de coordonate  $f$  pentru o dreaptă  $a$  pe care se aleg punctele ce intervin în aceste axiome. Se poate acum redefini interiorul unui segment.

**Teorema 2.4.** *Dacă  $a$  este o dreaptă și  $O$  un punct al ei, mulțimea  $a - \{O\}$  se descompune în mod unic în două clase disjuncte nevide („semidrepte deschise de origine  $O$  situate pe  $a$ ”) încît punctele  $P, Q$  aparțin la clase distincte dacă și numai dacă  $P - O - Q$ .*

*Demonstrație.* Fie  $f$  un sistem de coordonate pe  $a$  încît  $f(O) = 0$ . Mulțimile  $a_1 = \{X : X \in a \text{ și } f(X) > 0\}$  și  $a_2 = \{Y : Y \in a \text{ și } f(Y) < 0\}$  satisfac evident condițiile din enunț. Pentru unicitate să considerăm un element  $g \neq f$  din  $SC(a)$  încît  $g(O) = 0$ . Dacă, prin absurd, sistemului de coordonate  $g$  i-ar corespunde o altă desfacere în semidrepte deschise a mulțimii  $a - \{O\}$ , ar exista de exemplu puncte  $P, Q$  în  $a_1$  încît  $g(P) \cdot g(Q) < 0$ . Presupunind că am notat punctele  $P, Q$  încît  $f(P) < f(Q)$  urmează

$$(*) \quad d(O, P) + d(P, Q) = d(O, Q).$$

Din relația  $g(P) \cdot g(Q) < 0$  urmează însă

$$(**) \quad d(P, O) + d(O, Q) = d(P, Q).$$

Încîzind cele două egalități se deduce  $d(P, Q) = d(O, Q)$  și revenind în (\*) obținem  $d(O, P) = 0$ , deci  $O = P$ , absurd.

*Observație.* Conform acestei teoreme se introduc noțiunile de *semidrepte deschise* și *închise*. Orientarea dreptei  $a$  se poate realiza cu în capitolul precedent sau se poate introduce o echivalență  $\sim$  pe  $SC(a)$  punînd  $f \sim g \Leftrightarrow f \circ g^{-1} = \text{funcție monoton crescătoare}$ . Se definește o orientare pe  $a$  drept un element din  $SC(a)/\sim$ .

**Teorema 2.5.** *Sistemul de coordonate  $h$  din teorema 2.2 („de așezare a riglei”) este unic.*

Într-adevăr, pe semidreapta  $(O : A)$  se impune să aibă loc  $h(X) = d(O, X)$  iar pe semidreapta opusă,  $h(X) = -d(O, X)$ .

*Observație.* În scopuri didactice, în [21], axioma riglei are o formulare mai tare ce include și teoremele 2.2 și 2.5. Mai considerăm evident faptul că relația derivată de congruență a segmentelor poate fi introdusă de pe acum. În actualul context, preferăm să deducem consecințele în ordinea în care apar prin axiomele lui Hilbert, înse- rînd aici doar o consecință a axiomelor  $B_1 - B_6$  ce are o importanță deosebită în edificarea geometriei.

**Teorema 2.6.** *Orice segment nenul  $AB$  are un mijloc unic.*

*Demonstrație.* Teorema afirmă că pe dreapta  $AB$  există un punct  $M$  unic încît  $d(A, M) = d(M, B)$ . Să observăm că un astfel de punct  $M$ , dacă există, nu poate satisface de exemplu  $M - A - B$  pentru că în sistemul  $f$  de coordonate ce ar satisface  $f(M) = 0$ ,  $f(A) > 0$  ar urma  $f(B) > 0$  și  $|f(B) - f(M)| = d(B, M)$  ar implica  $f(M) = d(M, B) = d(M, A) = f(A)$  în contradicție cu injectivitatea lui  $f$ . Analog, și ipoteza  $A - B - M$  conduce la absurd. Reținem deci că pentru un eventual mijloc  $M$  se impune să aibă loc  $A - M - B$ .

Considerăm acum sistemul de coordonate  $g : (AB) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $g(A) = 0$ ,  $g(B) > 0$ . Condiția  $d(A, M) = d(B, M)$  revine la  $g(M) = g(B) - g(M)$  adică  $g(M) = \frac{1}{2}g(B)$ . Dar sistemul de coordonate considerat  $g$  este unic în baza teoremei precedente și conform celor de mai sus,  $M$  există și este unic, q.e.d.

*Observație.* În capitolul V, § 4, am afirmat că teorema 2.6 este consecință a axi- omelor din grupele I, II, III. Deși această teoremă a fost ulterior aplicată în capitolul V dovedindu-și astfel importanța, demonstrația ei nu a fost inserată în § 4. Ne îndeplinim parțial această datorie demonstrînd doar „existența”) pentru a înlesni o compara- tie între demonstrații cu caracter tipic în sistemele axiomatiche Birkhoff respectiv Hilbert.

Fie  $C$  un punct nesituat pe  $(AB)$ . În planul  $(ABC)$ , de acea parte a lui  $(AB)$  de care nu este  $C$ , conform axiomelor  $III_1$  și  $III_2$ , există un punct  $D$  încît  $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ABD}$  și  $AC \equiv BD$ . Punctele  $C, D$  sînt separate de  $(AB)$  deci va exista un punct  $M$  pe  $(AB)$



interior segmentului  $CD$ . Deducem  $\triangle ACB \equiv \triangle BDA$  (cazul LUL) și deci  $BC \equiv AD$ . Urmează (cazul LLL)  $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$  și de aici  $\widehat{ACM} \equiv \widehat{BDM}$ . În fine, triunghiurile  $ACM$  și  $BDM$  sînt congruente (ULU) deci  $AM \equiv MB$ , q.e.d.

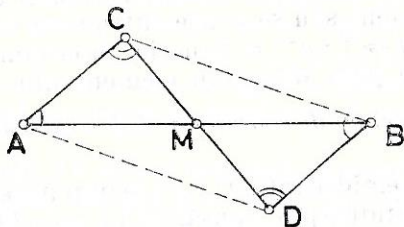


Fig. 14

Continuăm expunerea axiomelor lui Birkhoff.

**B<sub>7</sub>** (axioma de separare a planului). Pentru orice plan  $\alpha$  și orice dreaptă  $a$  inclusă în  $\alpha$ , mulțimea  $\alpha \setminus a$  se descompune în două submulțimi disjuncte, nevide,  $H, K$  încît punctele  $P, Q$  aparțin la mulțimi  $H, K$  distincte dacă și numai dacă există pe  $a$  un punct  $X$  situat între  $P$  și  $Q$ .

$$\forall \alpha \in \Pi \forall a \in \mathcal{L} : a \subset \alpha \Rightarrow \exists H \subset \alpha \setminus a : (H \neq \emptyset \wedge H \neq \alpha \setminus a) \wedge$$

$$\vee [\forall P \in \alpha \setminus (a \cup H) : (Q \in H \Leftrightarrow \exists X \in a, P - X - Q)].$$

Mulțimile  $H, K$  se numesc desigur *semiplane* (deschise) delimitate de  $a$  în  $\alpha$ .

**Teorema 2.7.** În baza axiomelor **B<sub>1</sub>–B<sub>6</sub>**, **B<sub>7</sub>** este echivalentă cu axioma **II<sub>4</sub>** a lui Pasch.

**Demonstrație.** Aceptăm **B<sub>7</sub>**; fie un triunghi  $ABC$  și o dreaptă  $a$  inclusă în planul  $\alpha$  al triunghiului ce nu conține niciunul dintre vîrfurile  $A, B, C$ . Fie  $H, K$  semiplanele delimitate de  $a$  în  $\alpha$ . Dacă  $a$  conține un punct interior segmentului  $AB$ , vîrfurile  $A, B$  sînt în semiplane distincte; de exemplu  $A \in H, B \in K$ . Dacă  $C \in H$ ,  $a$  va tăia latura  $BC$  iar dacă  $C \in K$ ,  $a$  va tăia latura  $AC$ . Implicația inversă a fost demonstrată în capitolul precedent pe baza unor propoziții ce au fost deduse aici drept adevărate.

**Observație.** Și în sistemul axiomatic al lui Birkhoff și în cel al lui Hilbert propozițiile **II<sub>4</sub>** și **B<sub>7</sub>** sînt echivalente și pot fi alese ca axiome. Opțiunea este o chestiune de „eleganță” și este dictată de „concordanța concepțiilor”. Axioma **II<sub>4</sub>** are o formulare mai geometrică și se încadrează mai bine în sistemul lui Hilbert. Axioma **B<sub>7</sub>** este avansată de adoptarea „oficială” a limbajului teoriei mulțimilor și este firesc preluată de sistemul axiomatic al lui Birkhoff. Să mai notăm și faptul că **B<sub>7</sub>** este „mai tare” decît

**II<sub>4</sub>**, deoarece demonstrația de mai sus se aplică și cînd  $A, B, C$  sînt coliniare și asigură că  $a$  mai taie încă *exact* o latură (vezi teorema 2.3 cap. V). Acesta este încă un motiv pentru încadrările date acestor propoziții în sistemele axiomatic analizate.

Reținem că pînă în acest moment am dedus toate axiomele din grupele I și II ale lui Hilbert din axiomele **B<sub>1</sub>–B<sub>7</sub>**. Pentru a formula următoarele axiome din sistemul lui Birkhoff se introduce noțiunea de unghi (nul, propriu, alungit) ca pereche de semidrepte cu aceeași origine coincidente, necoliniare, coliniare distincte). Fie  $\mathcal{U}$  mulțimea tuturor unghiurilor. Noțiunea de interior al unui unghi se introduce ca în teoria lui Hilbert. Înainte de a formula următoarele trei axiome (referitoare la măsurarea unghiurilor) mai atragem atenția că limita superioară, 180, a codomeniului funcției  $m$  este arbitrară, exprimînd opțiunea pentru măsura „în grade”.

**II<sub>5</sub>**.  $m(\widehat{AOB}) = 0$  dacă și numai dacă  $\widehat{AOB}$  este unghi nul și  $m(\widehat{AOB}) = 180$  dacă și numai dacă  $\widehat{AOB}$  este unghi alungit.

$$[m(\widehat{h, k}) = 0 \Leftrightarrow h = k] \wedge [m(\widehat{h, k}) = 180 \Leftrightarrow (h \neq k \wedge \exists a \in \mathcal{L} : h \cup k \subset a)]$$

**II<sub>6</sub>**. (axioma „de construcție” a unghiurilor proprii). Oricare ar fi : o dreaptă  $a$ , o semidreaptă închisă  $h$  inclusă în  $a$ , un semiplan  $H$  delimitat de  $a$ , și un număr real  $u \in (0, 180)$  există exact o semidreaptă  $k$  încît  $k \subset H \cup a$  și  $m(h, k) = u$ .

Renunțăm la exprimarea formalizată a acestei axiome deoarece pentru a-i oferi dimensiuni rezonabile ar trebui să introducem notații pentru mulțimea semidreptelor închise, și pentru mulțimea semiplanelor limitate de o anumite dreaptă  $a$ ; acest surplus de notații ar contraveni flagrant scopului didactic declarat al sistemului axiomatic.

**II<sub>10</sub>**. (axioma „adunării unghiurilor”). Dacă  $B$  este punct interior unghiului  $\widehat{AOC}$ , atunci  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC})$ .

$$B \in \text{Int } \widehat{AOC} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}).$$

**II<sub>11</sub>**. (axioma „suplimentului”) Dacă  $O$  este între  $A$  și  $C$ , atunci pentru orice punct  $B \notin (AC)$  are loc :  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180$ .

$$A - O - C \wedge B \in S \setminus (AC) \Rightarrow m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180.$$



Atragem atenția că în varianta didactică din [21] ultimele două axiome sînt grupate într-o singură axiomă. Chestiunea este neesențială, opțiunile exprimînd doar „gustul” autorilor.

Vom introduce în acest moment relații de „congruență”,  $\equiv$ , în mulțimea  $\mathcal{S}$  a segmentelor și, separat, în mulțimea  $\mathcal{U}$  a unghiurilor punînd  $AB \equiv CD \Leftrightarrow d(A, B) = d(C, D)$  și respectiv  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD} \Leftrightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD})$ .

**Teorema 2.8.** Axiomele  $\text{III}_1, \text{III}_2, \text{III}_3, \text{III}_4$  din sistemul axiomatic al lui Hilbert sînt consecințe ale axiomelor  $B_1 - B_{11}$ .

Demonstrația acestei teoreme este imediată. De fapt din axiomele  $B_1 - B_{11}$  urmează ușor teoreme mai tari ca axiomele citate ca de exemplu: congruențele (de segmente respectiv unghiuri) sînt echivalente, „scăderea” (și nu doar adunarea) segmentelor și unghiurilor. Acesta este un mare avantaj didactic pentru că se deduc rapid și ușor teoreme de largă aplicabilitate.

Pentru moment funcțiile  $d$  și  $m$  nu sînt corelate; stabilirea interdependenței acestor funcții se poate realiza pe mai multe căi. De exemplu, o variantă didactică ar fi postularea directă a teoremei cosinusului; astfel, după studiul algebric al funcțiilor reale de variabilă reală sinus și cosinus s-ar deduce ușor și teorema sinusurilor, faptul că suma unghiurilor unui triunghi este  $180^\circ$ , axioma paralelelor și întreaga geometrie euclidiană! Opinăm însă că o astfel de abordare a geometriei mai repede ar desființa geometria subordonînd-o calculelor trigonometrice decît ar edifica-o! Am prezentat aici această variantă imaginară pentru a atenționa asupra unor cerințe mai subtile ce trebuie să le satisfacă o teorie axiomatică (a geometriei): să nu obtureze estetica acelei teorii.

Varianta de continuare pentru care a optat Birkhoff este aceea a lui Hilbert: axioma  $B_{12}$  exprimă  $\text{III}_5$  și principalele ei consecințe directe:

$B_{12}$ . (axioma LUL). Dacă  $(A, B, C)$  și  $(D, E, F)$  sînt triplete de puncte necoliniare și  $AB \equiv DE, AC \equiv DF, \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$ , atunci:  $BC \equiv EF, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}, \widehat{ACB} \equiv \widehat{DFE}$ .

Evident, această axiomă include  $\text{III}_5$  și sistemul axiomatic  $B_1 - B_{12}$  acopere primele trei grupe din axiomatica lui Hilbert. Se constată însă ușor că, grație „axiomei riglei”, și axiomele de continuitate sînt consecințe ale axiomelor  $B_1 - B_{12}$ . Putem deci conchide:

**Teorema 2.9.** Axiomele  $B_1 - B_{12}$  au drept consecință conținutul geometriei absolute din sistemul axiomatic al lui Hilbert.

Abia după formularea axiomei LUL putem constata că funcția  $d: S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  este o distanță (satisfacă și inegalitatea triunghiulară). Reamintim că am demonstrat în § 4 al capitolului precedent teorema 4.3 a triunghiului isoscel și teorema 4.7 a unghiului exterior.

Următoarele două teoreme au aceleași demonstrații în sistemul lui Hilbert și în cel al lui Birkhoff.

**Teorema 2.10.** Într-un triunghi  $ABC$ , laturii mai mari i se opune un unghi mai mare și reciproc.

*Demonstrație.* Să presupunem  $AB < AC$ , deci că există  $D$  încît  $A - D - C$  și  $AB \equiv AD$ . Folosind teoremele mai sus reactualizate deducem  $\widehat{C} < \widehat{BDA} = \widehat{ABD} < \widehat{B}$ . Reciproca se dovedește prin reducere la absurd.

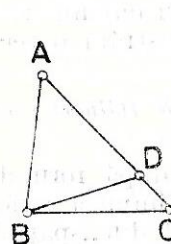


Fig. 15

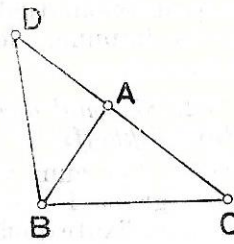


Fig. 16

**Teorema 2.11.** Într-un triunghi, o latură este mai mică decît suma celorlalte două.

*Demonstrație.* Considerăm triunghiul  $ABC$  și un punct  $D$  încît  $C - A - D$  și  $AB \equiv AD$ . Rezultă  $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD} < \widehat{DBC}$ , deci  $d(B, C) < d(C, D)$ . Dar  $d(C, D) = d(A, D) + d(A, C) = d(A, B) + d(A, C)$  și deci  $d(B, C) < d(A, B) + d(A, C)$ , q.e.d.

*Observație.* Am dedus acum inegalitatea triunghiulară  $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$  pentru funcția  $d$ ; avînd în vedere și teorema 2.1 putem acum afirma că denumirea de distanță pentru funcția  $d$  este corectă.

Ultima axiomă a sistemului lui Birkhoff,  $B_{13}$ , coincide cu axioma V „a paralelelor” din sistemul Hilbert:

$B_{13}$ . Fiind date o dreaptă  $a$  și un punct  $A$  care nu-i aparține, în planul determinat de  $a$  și  $A$ , există cel mult o dreaptă  $b$  care conține punctul  $A$  și este paralelă cu dreapta  $a$ . Cu aceasta lista axiomelor din sistemul axiomatic al lui Birkhoff se încheie.



## § 3. ELEMENTE DE METATEORIE

Conținutul paragrafului precedent a fost direcționat spre deducerea următoarei propoziții:

**Teorema 3.1.** *Sistemul axiomatic al lui Birkhoff implică sistemul axiomatic al lui Hilbert.*

Această teoremă este însă importantă pentru analiza metateoretică a sistemului lui Hilbert (deoarece îi furnizează un model) și mai puțin pentru sistemul lui Birkhoff. Deci, direcționarea deducțiilor din paragraful precedent s-a dovedit utilă în privința edificării geometriei pe baza axiomaticii lui Birkhoff dar nu și pentru analiza metateoretică. Se impune, aici, să demonstrăm o reciprocă a teoremei 3.1.

**Teorema 3.2.** *Sistemul axiomatic al lui Hilbert implică sistemul axiomatic al lui Birkhoff.*

*Demonstrație.* Așa cum remarcasem după formularea axiomei  $B_5$ , axiomele din grupa I-a a lui Hilbert implică axiomele  $B_1-B_5$ . Să considerăm acum fixate două puncte  $U, V$  din „spațiul lui Hilbert”, conform teoremei 6.2 din capitolul precedent există o funcție măsurătoare o vom nota prin  $d$ , unde  $d: S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ , și  $d(U, V) = 1$ . Pentru simplitatea scrierii vom nota însă  $AB$  în loc de  $d(A, B)$ . Teorema 6.1 cap. V, asigură că axioma  $B_6$  a riglei este consecință a axiomelor lui Hilbert. Prin teorema 2.6 constatăm acum că axioma  $B_7$  de separare a planului este consecință a axiomelor lui Hilbert.

Deoarece în § 6 al capitolului precedent nu am procedat în mod efectiv la introducerea măsurii unghiurilor vom adopta aici o cale mai tehnică, mai puțin elegantă dar mai rapidă. Vom construi o funcție  $m: \mathcal{U} \rightarrow [0, 180]$  punind

$$(3.1) \quad m(\widehat{AOB}) = \frac{180}{\pi} \arccos \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB}.$$

Se impune să ne asigurăm de consistența acestei definiții adică de independența valorii lui  $m(\widehat{AOB})$  de alegerea punctelor  $A, B$  pe laturile  $(O; A)$  respectiv  $(O; B)$ . Înlocuind doar  $A$  prin  $C$ , putem presupune că are loc de exemplu  $O - A - C$  și este necesară probarea egalității

$$\frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{OC^2 + OB^2 - BC^2}{2OC \cdot OB}$$

echivalentă cu relația lui Stewart:

$$OB^2 \cdot AC + BC^2 \cdot OA = AB^2 \cdot OC + OA \cdot OC \cdot AC.$$

Presupunem desigur cunoscut modul de demonstrare a acestei egalități în geometria euclidiană; atenționăm cu această ocazie că relația lui Stewart are importanță intrinsecă și nu este un element de periferie al geometriei!

Pentru verificarea axiomei  $B_8$  vom constata:

$$\begin{aligned} m(\widehat{AOB}) = 0 &\Leftrightarrow \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = 1 \Leftrightarrow (OA - OB)^2 = AB^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (O - A - B) \vee (O - B - A) \Leftrightarrow [O; A] = [O; B]. \end{aligned}$$

În mod analog,  $m(\widehat{AOB}) = 180$ , revine la  $OA + OB = AB$ , deci la  $A - O - B$ , adică la faptul că  $AOB$  este unghi alungit.

Axioma  $B_9$  (de construcție a unghiurilor) exprimă tocmai axioma  $III_4$  (de purtare congruentă a unghiurilor).

Calcululele pentru verificarea axiomei  $B_{10}$  nu prezintă dificultăți principiale dar sînt lungi și lipsite de interes geometric.

Pentru verificarea axiomei  $B_{11}$  ne vom situa în cazul particular (ce nu restrînge generalitatea)  $OA \equiv OB \equiv OC$ . Bazîndu-ne pe proprietatea trigonometrică  $\cos(\pi - u) = -\cos u$ , demonstrarea concluziei  $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180$  revine la:

$$\frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = -\frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC},$$

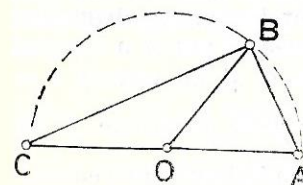


Fig. 18

ce este la rîndul ei echivalentă cu  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , deci cu teorema lui Pitagora.

Axioma  $B_{12}$  exprimă axioma  $III_5$  și teorema 4.3, cap. V, iar axioma  $B_{13}$  coincide cu axioma V, deci teorema 3.2 este complet demonstrată. În concluzie putem afirma că sistemul axiomatic al lui Birkhoff admite un model în teoria axiomatică a lui Hilbert, deci:

**Teorema 3.3.** *Sistemul axiomatic al lui Birkhoff este necontradictoriu.*

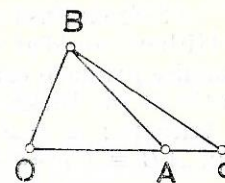


Fig. 17



Atragem însă atenția că sistemele axiomatice ale lui Birkhoff și Hilbert nu sînt echivalente deoarece nu se corespund noțiunile și relațiile primare din cele două sisteme. Pornind de la sistemul axiomatice al lui Birkhoff obținem ușor noțiunile și relațiile primare de la Hilbert:  $\Delta = \mathcal{L}$ ,  $\Pi = \Pi$ ; se introduce congruența segmentelor prin  $AB \equiv CD \Leftrightarrow \widehat{d(A, B)} = \widehat{d(C, D)}$  și congruența unghiurilor prin  $\widehat{(l, k)} \equiv \widehat{(l', k')} \Leftrightarrow m(\widehat{h, k}) = m(\widehat{h', k'})$ . Avînd însă noțiunile și relațiile primare de la Hilbert le putem obține ușor doar pe  $\mathcal{L}$ ,  $\Pi$  și  $m$ . Pentru a determina  $\widehat{d}$  se impune alegerea arbitrară a unui etalon  $OE$  după care putem defini  $\widehat{d(A, B)}$  drept numărul real nenegativ unic determinat prin  $AB = x \cdot OE$ . Schimbarea etalonului  $OE$  revine la înlocuirea funcției  $\widehat{d}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  printr-o funcție analoagă  $\widehat{d'}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $\widehat{d'(A, B)} = k \cdot \widehat{d(A, B)}$ ,  $k$  fiind un număr real pozitiv. Așadar pornind de la teoria axiomatice a lui Hilbert nu putem determina structura Birkhoff  $(S, \mathcal{L}, \Pi, \widehat{d}, m)$  ci doar o structură matematică mai generală  $(S, \mathcal{L}, \Pi, \delta, m)$ , unde  $\delta = \{k \cdot \widehat{d} : k \in \mathbb{R}_+\}$ .

Schimbarea  $\widehat{d} \leadsto \delta$  are semnificații profunde. Una a fost deja pusă în evidență: imposibilitatea unei alegeri canonice a unui etalon pentru măsura lungimilor în cadrul geometriei euclidiene. (O astfel de alegere este posibilă în geometriile neeuclidiene.) O altă semnificație, cu caracter practic, este dată de posibilitatea coexistenței unor etaloane distincte pentru măsura lungimilor ca de exemplu: metrul, yardul, milimetrul, anul lumină, ångstromul, parsecul etc. Încă două semnificații se vor evidenția ulterior.

Avînd în vedere că am constatat deja că sistemul axiomatice al lui Hilbert este categoric și complet vom analiza acum ce implicații metateoretice poate avea alegerea unui element  $\widehat{d} \in \delta$ , alegere ce determină geometria Birkhoff. Am văzut însă că alegerea distanței  $\widehat{d}$  în familia  $\delta$  revine la fixarea (în geometria hilbertiană) a unui etalon  $OE$ . Putem înlocui un astfel de etalon prin altul  $O'E'$  și nu restringem generalitatea presupunînd  $OE \parallel O'E'$ . În cazul ce prezintă interes  $OE$  și  $O'E'$  nu sînt congruente și există un punct  $U$  comun dreptelor  $OO'$  și  $EE'$  (mai presupune că  $E$  și  $E'$  sînt de aceeași parte a dreptei  $OO'$ ). Va exista atunci o omotetie  $f$  de centru  $U$  și de raport  $r = \frac{UO'}{UO} = \frac{O'E'}{OE}$  ce transformă  $OE$  în  $O'E'$ . Această omotetie  $f$  nu afectează nici una dintre noțiunile primare de la Hilbert deci constituie un automorfism al modelului Hilbert. Omotetia  $f$  nu conservă distanța  $\widehat{d}$  ci o înlocuiește cu  $\widehat{d'} = \frac{1}{r} \widehat{d}$  și prin urmare constituie un izomorfism al modelelor Birkhoff distincte  $(S, \mathcal{L}, \Pi, \widehat{d}, m)$

și  $(S, \mathcal{L}, \Pi, \widehat{d'}, m)$ . Ne interesează însă faptul că aceste modele distincte sînt izomorfe și prin urmare:

**Teorema 3.4.** *Sistemul axiomatice al lui Birkhoff este categoric și complet.*

Atragem acum atenția că înlocuirea  $\widehat{d} \leadsto \delta$  are și o anume semnificație grupală. Grupul transformărilor geometrice ce conservă structura Birkhoff este alcătuit din izometrii iar grupul transformărilor geometrice care păstrează structura Hilbert este alcătuit din asemănări (compuneri de izometrii cu omotetii).

Repetăm că am prezentat în acest capitol o variantă didactică a axiomaticeii lui Birkhoff; această variantă conține substanțial mai multe axiome și suplimentarea numerică poate avea drept efect lezarea minimalității sistemului. Subliniem însă că minimalitatea este o calitate minoră în comparație cu accesibilitatea.

Pentru unele axiome nici nu ne putem pune problema de a fi independente „global”, deci și de acele axiome ce au contribuit la formarea unor noțiuni ce intervin în axioma analizată.

Putem însă remarca independența globală a axiomei  $B_{13}$  a paralelelor, geometria absolută conținînd și geometria euclidiană în care este valabilă negația lui  $B_{13}$ .

Și axioma  $B_{12}$  (LUL) este independentă de celelalte, după cum se poate constata înlocuind distanța  $\widehat{d}$  a unui model cu o altă distanță  $\widehat{d'}$ , asociată unei drepte fixate  $a$ :

$$\widehat{d'}(A, B) = \begin{cases} \widehat{d(A, B)} & \text{dacă } \{A, B\} \neq a \\ 2\widehat{d(A, B)} & \text{dacă } \{A, B\} \subset a. \end{cases}$$

Triunghiuri  $ABC$  și  $DEF$  ce satisfac  $\widehat{d(A, B)} = \widehat{d(D, F)}$ ,  $\widehat{d(A, C)} = \widehat{d(D, F)}$  și  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DEF})$  pot să nu satisfacă axioma ( $B_{12}$ ) pentru noua distanță  $\widehat{d'}$  dacă de exemplu  $\{A, B\} \subset a$  și  $\{D, E\} \not\subset a$ . Modificarea făcută nu alterează valabilitatea celorlalte axiome.



## § 1. GENERALITĂȚI

Fiind date mulțimile  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  numim *transformare (geometrică) a lui  $\mathcal{M}$  în  $\mathcal{N}$*  o aplicație  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ; prezența calificativului din paranteză este justificată doar atunci când pe cele două mulțimi date sînt indicate sau subînțelese anumite „structuri geometrice” iar  $T$  satisface anumite condiții referitoare la aceste structuri. Avînd încă o transformare  $T': \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{N}'$ , în ipoteza că are loc  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}'$ , putem considera transformarea  $T' \circ T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}'$  numită *compunere a transformărilor  $T$  și  $T'$* , definită pentru orice  $M \in \mathcal{M}$  prin  $(T' \circ T)(M) = T'(T(M))$ . Operația parțială de compunere a transformărilor (geometrice) este *asociativă*, adică transformările  $T'' \circ (T' \circ T)$  și  $(T'' \circ T') \circ T$  există simultan și coincid. (Coincidența a două transformări revine la coincidența domeniilor, a codomeniilor și a corespondențelor).

Pentru aplicația  $T$  mai sus considerată, în ipoteza suplimentară  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ , se poate defini compunerea  $T \circ T$  mai des notată prin  $T^2$ . Simbolul mai general  $T^n$  se definește pentru orice număr natural nenul  $n$ , în mod recursiv, prin  $T^1 = T$  și  $T^{n+1} = T \circ T^n$ . Dacă  $n$  este cel mai mic număr natural pentru care are loc  $T^n = T$  se spune că transformarea  $T$  este *involutivă de ordin  $n$* ; în absența specificării ordinului vom subînțelege  $n = 2$ .

Pentru orice mulțime  $\mathcal{M}$  se pune în evidență transformarea *identică*  $I_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , unde pentru orice  $M$  din  $\mathcal{M}$ :  $I_{\mathcal{M}}(M) = M$ ; cînd nu vor fi posibile confuzii vom nota  $I$  în loc de  $I_{\mathcal{M}}$ .

Fiind dată transformarea  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  vom spune despre o transformare  $U$  că este *inversa lui  $T$*  dacă  $T \circ U = I_{\mathcal{N}}$  și  $U \circ T = I_{\mathcal{M}}$ ; vom folosi în acest caz (și numai în acesta) notația  $U = T^{-1}$ .

**Teorema 1.1.** Transformarea  $T$  admite inversă atunci și numai atunci cînd este bijectivă; dacă o transformare  $T$  admite inversă atunci inversa este unică.

**Teorema 1.2.** Mulțimea transformărilor bijective ale unei mulțimi  $\mathcal{M}$  în ea însăși constituie împreună cu operația de compunere un grup (ce îl vom nota prin  $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ ).

Un element  $F \in \mathcal{B}_{\mathcal{M}}$  ce satisface  $T(F) = F$  se spune că este un *element fix al transformării  $T$* .

Fie o transformare  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  și o submulțime  $u$  a lui  $\mathcal{M}$ ; mulțimea  $\{T(M): M \in u\}$  se notează prin  $\bar{T}(u)$  și se numește *image prin  $T$  a mulțimii  $u$* . Fie  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  „mulțimea părților lui  $\mathcal{M}$ ”, adică mulțimea care are elemente submulțimile  $u$  ale lui  $\mathcal{M}$  și mulțimea  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$  alcătuită analog. Se constată ușor că putem concepe  $\bar{T}$  drept transformare de la  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  la  $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ ;  $\bar{T}$  se numește *globalizata lui  $T$* . În mod obișnuit simbolul  $\bar{\phantom{x}}$  ce a apărut în notație se omite; așa vom proceda și noi atunci cînd omisiunea nu va putea genera confuzii.

## § 2. IZOMETRII

Se numește *distanță* pe mulțimea  $\mathcal{M}$  o aplicație  $d: \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$  ce satisface condițiile: 1°  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ , 2°  $d(A, B) = d(B, A)$  și 3°  $\forall A, B, C \in \mathcal{M}, d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ .

Se numește *spațiu metric* un cuplu  $(\mathcal{M}, d)$ , unde  $d$  este o distanță pentru  $\mathcal{M}$ . În spațiul metric  $(\mathcal{M}, d)$  se numește *sferă* de centru  $O$  și rază  $r$  locul geometric al punctelor  $M$  ce satisfac  $d(O, M) = r$ . În cazul particular cînd  $\mathcal{M}$  este un plan euclidian în locul cuvîntului sferă se folosește cel de *cerc*.

Se numește *izometrie* a lui  $(\mathcal{M}, d)$  o aplicație surjectivă  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ce conservă distanța, adică:

$$\forall A, B \in \mathcal{M}, d(T(A), T(B)) = d(A, B).$$

**Teorema 2.1.** Orice izometrie este injectivă; izometriile unui spațiu metric alcătuiesc grup în raport cu operația de compunere.

*Observație.* Condiția de surjectivitate inclusă aici în definiția izometriilor simplifică esențial demonstrația.

**Teorema 2.2.** O izometrie  $T$  a unui plan euclidian conservă relațiile ternare „a fi între” și „a fi coliniare”; imaginea prin  $T$  a unei drepte, semidrepte, a unui segment, semiplan, cerc, arc de cerc este o mulțime caracterizată prin aceeași denumire.

*Demonstrație.* Condiția  $A-B-C$ , echivalentă cu  $B \in |AC|$ , se exprimă aici prin  $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$  și  $d(A, B) \cdot d(B, C) \cdot d(A, C) \neq 0$ . Rezultă că izometria  $T$  conservă relația „a fi între” și  $T(|AC|) = |T(A)T(C)|$ . Dacă  $A-O-B$ , atunci  $X \in [O; A) \Leftrightarrow d(O, X) + d(B, O) = d(B, X)$ , deci  $T$  aplică semi-



drepte pe semidrepte. Fie  $s$  semiplanul limitat de  $d$  ce nu conține  $A$ . Notăm  $T(A) = A'$ ,  $T(d) = d'$  și fie  $M'$  imaginea prin  $T$  a unui punct  $M$  arbitrar.  $M \in s \Leftrightarrow |AM| \cap d \neq \emptyset \Leftrightarrow M' \in s'$ , unde am notat cu  $s'$  semiplanul delimitat de  $d'$  ce nu conține  $A'$ . Dacă  $\mathcal{C}$  este cerc de centru  $O$  și rază  $R$ , atunci  $T(\mathcal{C})$  este cercul de centru  $O' = T(O)$  și aceeași rază  $R$ . Un arc de cerc apare intersectând un cerc cu un semiplan.

**Teorema 2.3.** *O izometrie  $T$  conservă unghiurile, adică din  $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$ ,  $T(C) = C'$  urmează  $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ .*

Se constată că triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  sînt congruente deci au unghiuri corespunzătoare congruente.

**Teorema 2.4.** *Dacă o izometrie  $T$  admite punctele distincte  $A, B$  drept puncte fixe, atunci orice punct  $M$  al dreptei  $AB$  este punct fix; o izometrie  $T$  a planului  $\pi$  în el însuși ce admite trei puncte fixe necoliniare  $A, B, C$  este transformarea identică.*

*Demonstrația* este imediată. Fie  $M \in (AB)$  și să presupunem de exemplu că are loc  $M-A-B$ , deci  $d(M, A) + d(A, B) = d(M, B)$ . Pentru  $M' = T(M)$  va rezulta  $d(M', A) = d(M, A)$  și  $d(M', B) = d(M, B)$ , condiții ce asigură  $M = M'$ .

În ipoteza  $T(A) = A$ ,  $T(B) = B$ ,  $T(C) = C$ , pentru  $N$  arbitrar în  $\pi$ , putem alege unul din vîrfurile triunghiului  $ABC$ , de exemplu  $A$  încît  $(AN)$  să taie  $(BC)$  într-un punct  $M$ .  $M$  fiind pe  $(BC)$  va rezulta, conform etapei precedente,  $T(M) = M$  și apoi pentru  $N$  pe  $(AM)$  va rezulta  $T(N) = N$ , q.e.d.

Invităm cititorul să formuleze și să demonstreze rezultate asemănătoare relativ la izometrii ale spațiului euclidian tridimensional.

### § 3. SIMETRII

Fie un plan  $\pi$  și o dreaptă  $d$  în  $\pi$ ; se numește *simetrie* (a planului  $\pi$ ) față de  $d$  o transformare  $S: \pi \rightarrow \pi$  ce asociază punctului  $M \notin d$  punctul  $M'$  caracterizat prin condiția ca  $d$  să fie mediatoarea segmentului  $MM'$  și conservă punctele  $M \in d$ ; dreapta  $d$  se numește *axa simetriei*.

**Teorema 3.1.** *O simetrie față de o dreaptă  $d$  este o izometrie.*

*Demonstrație.* Fie  $A'$  și  $B'$  imaginile punctelor  $A, B$  și  $A_1, B_1$  proiecțiile ortogonale ale lui  $A, B$  pe  $d$ . Vom presupune că sîntem

în cazul generic  $A_1 \neq B_1$ . Vom constata succesiv:  $\triangle BB_1A_1 \equiv \triangle B'B_1A_1$ ;  $A_1B \equiv A_1B'$ ,  $\triangle ABA_1 \equiv \triangle A'B'A_1$ ,  $AB \equiv A'B'$ . Cazul  $A_1 = B_1$  se cere tratat separat. Surjectivitatea se probează ușor.

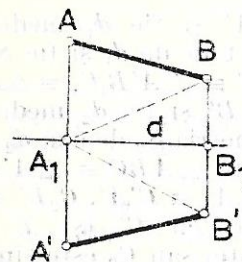


Fig. 19

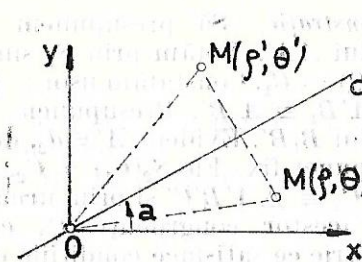


Fig. 20

Vom insera aici cîteva considerente referitoare la exprimări analitice ale simetriei plane față de o dreaptă (textul cules cu caractere peti); aceste considerații pot fi omise la prima lectură.

Să considerăm un reper polar avînd ca axă polară o semidreaptă  $Ox$  cu  $O \in d$ . Vom mai nota prin  $a$  unghiul ascuțit format de  $d$  cu  $Ox$ . Fie  $M(\rho, \theta)$  și  $M'(\rho', \theta')$  imagini ale  $M$  prin simetria  $S$ . Vom constata ușor  $OM \equiv OM'$  deci  $\rho = \rho'$  și  $\frac{1}{2}(\theta + \theta') = a$ , deci  $\theta' = 2a - \theta$ . Conchidem că în reperul polar considerat simetria  $S$  este exprimată prin  $\rho' = \rho$ ,  $\theta' = 2a - \theta$ .

Fie  $Oy$  semidreaptă perpendiculară pe  $Ox$ ; vom explicita efectul simetriei  $S$  asupra coordonatelor carteziene în reperul obținut. Vom deduce ușor:  $M(x, y)$ , unde  $x = \rho \cdot \cos \theta$ ,  $y = \rho \cdot \sin \theta$ ,  $x' = \rho' \cdot \cos \theta' = \rho \cdot \cos(2a - \theta) = \cos 2a(\rho \cdot \cos \theta) + \sin 2a(\rho \cdot \sin \theta) = x \cdot \cos 2a + y \cdot \sin 2a$  și  $y' = \rho' \cdot \sin \theta' = \rho \cdot \sin(2a - \theta) = \sin 2a(\rho \cdot \cos \theta) - \cos 2a(\rho \cdot \sin \theta) = x \cdot \sin 2a - y \cdot \cos 2a$ .

Deci  $S: M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ , unde:

$$x' = x \cdot \cos 2a + y \cdot \sin 2a, y' = x \cdot \sin 2a - y \cdot \cos 2a.$$

**Teorema 3.2.** *Orice simetrie  $S$  față de o dreaptă satisface  $S^{-1} = S$  (deci și  $S^2 = I$ ). Dacă  $I$  este transformarea identică, mulțimea  $\{S, I\}$ , constituie grup în raport cu compunerea.*

**Teorema 3.3.** *Un punct  $X$  al planului este invariant de o simetrie  $S$  față de o dreaptă dacă și numai dacă este situat pe axa simetriei.*

**Teorema 3.4.** *O dreaptă este invariantă la o simetrie  $S$  de axă  $d$  dacă și numai dacă  $a \perp d$  sau  $a = d$ .*

**Teorema 3.5.** *Un cerc  $\mathcal{C}(C, r)$  este invariant de o simetrie  $S$  de axă  $d$  dacă și numai dacă  $C \in d$ . (Se constată că  $S(\mathcal{C})$  este un cerc  $\mathcal{C}'$  avînd centrul în  $C' = S(C)$  și aceeași rază  $r$ ).*



**Teorema 3.6.** Oricare ar fi într-un plan  $\pi$  triunghiurile congruente  $ABC$  și  $A'B'C'$  există o izometrie unică  $T: \pi \rightarrow \pi$  încît  $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$  și  $T(C) = C'$ . Orice izometrie a planului este produsul a cel mult trei simetrii față de drepte convenabil alese.

**Demonstrație.** Să presupunem  $A \neq A'$  și fie  $d_1$  mediatoarea segmentului  $AA'$ . Notăm prin  $S_1$  simetria față de  $d_1$  și fie  $S_1(B) = B_1$ ,  $S_1(C) = C_1$ . Constatăm ușor:  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B_1C_1 \equiv \triangle A'B'C'$ . Rezultă  $A'B_1 \equiv A'B'$ . Presupunem  $B_1 \neq B'$  și fie  $d_2$  mediatoarea segmentului  $B_1B'$ . Evident  $A' \in d_2$ , deci simetria  $S_2$  de axă  $d_2$  admite  $A'$  drept punct fix. Fie  $S_2(C_1) = C_2$ . Rezultă  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B_1C_1 \equiv \triangle A'B'C_2 \equiv \triangle A'B'C'$  și prin urmare  $C_2A' \equiv C'A'$ ,  $C_2B' \equiv C'B'$ . Conform acestor congruențe  $C_2$  coincide cu  $C'$  (și  $T = S_2 \circ S_1$  este izometrie ce satisface condițiile enunțate) sau  $C_2$  este simetricul lui  $C'$  față de  $A'B'$ . Fie în acest caz  $S_3$  simetria față de  $(A'B')$ ; transformarea  $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$  este izometrie ce aplică  $A, B, C$  în  $A', B', C'$ .

Dacă în afara lui  $T$  ar mai exista o izometrie  $U$  încît  $U(A) = A'$ ,  $U(B) = B'$ ,  $U(C) = C'$ , transformarea  $U^{-1} \circ T$  ar fi o izometrie avînd punctele necoliniare  $A, B, C$ , fixe. Conform teoremei 4, § 2,  $U^{-1} \circ T = I$ , deci  $T = U$ .

Pentru o izometrie arbitrară  $T$  a planului  $\pi$  și pentru un triunghi arbitrar  $ABC$  vom găsi puncte  $A' = T(A)$ ,  $B' = T(B)$ ,  $C' = T(C)$  și vom construi descompunerea lui  $T$  în cel mult trei simetrii axiale ca în prima etapă a demonstrației.

Fie  $E_3$  spațiul tridimensional și o dreaptă  $d \subset E_3$ ; se numește *simetrie (spațială) de axă  $d$*  o transformare  $S: E_3 \rightarrow E_3$  ce conservă punctele lui  $d$  și asociază lui  $M$  nesituat pe  $d$  punctul  $M'$  simetric față de  $d$  în planul ce conține  $M$  și  $d$ . Teoremele 3.1, 3.2 și 3.3 își conservă enunțul (și demonstrațiile).

**Teorema 3.7.** Fie  $S$  o simetrie spațială de axă  $d$ . O dreaptă  $a$  distinctă de  $d$  este invariantă de  $S$  dacă și numai dacă  $a \perp d$  și  $a \cap d \neq \emptyset$ . Un plan este invariant de  $S$  dacă și numai dacă este perpendicular pe  $d$ .

**Teorema 3.8.** O sferă  $\mathcal{S}(C, r)$  este invariantă de o simetrie spațială  $S$  față de o axă  $d$  dacă și numai dacă  $C \in d$ .

Se numește *simetrie de centru  $O$*  (a unui plan  $\pi$  prin  $O$  sau a spațiului) transformarea ce conservă punctul  $O$  și aplică  $M \neq O$  în  $M'$  încît  $O$  este mijlocul lui  $MM'$ . Se numește *simetrie față de un plan  $\pi$*  o transformare  $S: E_3 \rightarrow E_3$  ce conservă punctele din planul  $\pi$  și transformă punctul  $M$  nesituat în  $\pi$  în punctul  $M'$  caracterizat prin proprietatea că  $\pi$  este plan mediator al lui  $MM'$ . Conside-

răm un exercițiu util și accesibil reformularea teoremelor din acest paragraf (și demonstrarea lor) referitor la simetrii în raport cu puncte sau plane.

#### § 4. VECTORI

Acest paragraf are scopul imediat de a pregăti un vocabular pentru paragraful următor dar și pe acela mai general de a prezenta noi conexiuni între capitolele precedente.

Capitolul IV a arătat modul în care se poate edifica geometria elementară pe baza noțiunii de spațiu vectorial; se impune o prezentare a modului în care se poate obține noțiunea de vector drept noțiune derivată în raport cu un sistem axiomatic al geometriei.

Vom prezenta pentru început modalitatea „clasică” de introducere a noțiunii de vector, drept clasă de „echipolență” în mulțimea segmentelor orientate, unde două segmente sînt echipolente dacă „au aceeași mărime, direcție și sens”. Desigur din punct de vedere intuitiv, această modalitate este simplă, rapidă și accesibilă. Apreciem însă că, pentru a construi riguros noțiunea de vector pe această cale, este necesară depășirea unor dificultăți tehnice substanțiale.

Să considerăm în cadrul unei geometrii euclidiene mulțimea  $\mathcal{L}$  a dreptelor. Relația de paralelism,  $\parallel$ , constituie o relație binară pe  $\mathcal{L}$  ce se demonstrează a fi o echivalență. Nu prezentăm aici demonstrația acestei propoziții ce este bine realizată în manualul pentru clasa X-a [90, pagina 132–136], dar atragem atenția că și această etapă conține dificultăți tehnice apreciabile.

Să considerăm mulțimea factor  $\Delta = \mathcal{L}/\parallel$ ; un element din  $\Delta$  este o clasă de echivalență  $[d] = \{a : a \parallel d\}$  și se numește *direcție*; în locul exprimării  $a \in [d]$  se preferă: „ $a$  are direcția  $[d]$ ” sau, mai frecvent, „ $a$  și  $d$  au aceeași direcție”.

În cadrul unei teorii axiomatice a geometriei euclidiene se precizează conceptul de *orientare* a unei drepte; pentru teoria axiomatice a lui Hilbert am prezentat în cap. V, § 3, o modalitate de definire ce o credem inedită; pentru axiomaticea lui Birkhoff introducerea acestui concept este schițată în observația de sub teorema 2.4.

Atragem aici atenția că cele două modalități de definire nu coincid intrucît o clasă de echivalență în mulțimea semidreptelor situate pe o dreaptă  $a$  nu poate fi același lucru cu o clasă de echivalență în mulțimea sistemelor carteziene ale acelei drepte; credem că este sugestiv a spune că modalitățile indicate sînt „sinonime” deoarece alcătuiesc din „litere distincte” „cuvinte” ce au același înțeles. Se mai poate spune că am descris



aceeași realitate obiectivă succesiv în „limbi” diferite dar știm că există și un „dicționar” ce ne permite să traducem „mot à mot” o exprimare în cealaltă. (Un sistem de coordonate  $f: \alpha \rightarrow \mathbb{R}$  corespunzând bijectiv cu semidreapta  $f^{-1}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$  grație teoremei 2.5 din capitolul precedent.) Nu am fi insistat asupra acestui „detaliu” dacă nu ar fi exprimat o situație tipică în edificarea matematicii și dacă nu ne-ar fi făcut plăcere să combatem tendința „meschină” de a căuta în teoriile matematice „coincidențe” în loc de „rezonanțe”.

Prezentăm aici și o a treia modalitate de a defini orientarea unei drepte ce credem că este mai răspândită.

**Definiția 4.1.** Numim *orientare* a dreptei  $d$  o relație de ordonare totală  $\leq$  a mulțimii punctelor incidente ei ce satisface condiția: oricare ar fi  $A, B, C$  puncte ale lui  $d$ ,

$$A - B - C \Leftrightarrow (A < B < C \text{ sau } C < B < A).$$

**Teorema 4.1.** 1) Dacă  $h$  este o semidreaptă (închisă) de origine  $O$  inclusă în  $d$  relația binară  $\leq_h$  definită pe  $d$  prin:

$$X \leq_h Y \begin{cases} X \in d \setminus h \text{ și } (Y \in h \text{ sau } X - Y = O \text{ sau } X = Y), \\ X \in h \text{ și } (X = O \text{ sau } O - X = Y \text{ sau } X = Y), \end{cases}$$

este o orientare a dreptei  $d$ . 2) Fie  $k$  o altă semidreaptă inclusă în  $d$  și  $\leq_k$  orientarea asociată ei, atunci relațiile binare  $\leq_h$  și  $\leq_k$  coincid dacă și numai dacă  $h \subset k$  sau  $k \subset h$ .

**Teorema 4.1'.** 1) Dacă  $f$  este un sistem de coordonate pentru dreapta  $d$ , relația binară  $\leq_f$  definită pe  $d$  prin  $X \leq_f Y \Leftrightarrow f(X) \leq f(Y)$  este o orientare a dreptei  $d$ . 2) Dacă  $g$  este un alt sistem de coordonate pe  $d$ , atunci ordonările  $\leq_f$ ,  $\leq_g$  coincid dacă și numai dacă funcția  $f \circ g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este monoton crescătoare.

Omitem demonstrațiile acestor două teoreme întrucît nu prezintă interes principal; atragem însă atenția că demonstrarea primei teoreme în cadrul sistemului axiomatic al lui Hilbert, este suficient de dificilă din punct de vedere tehnic.

În continuare vom prefera pentru conceptul de orientare semnificația furnizată de prima definiție ce o considerăm a avea un caracter geometric mai pronunțat.

Fie o dreaptă  $d$  și mulțimea  $\Omega_d$  a tuturor orientărilor dreptelor ce au direcția  $[d]$ . Un element  $\omega$  din  $\Omega_d$  este o familie de semidrepte situate pe o aceeași dreaptă ce o vom nota prin  $\sigma(\omega)$  și o vom numi *suport al lui*  $\omega$ . Evident,

$$(4.1) \quad (\omega \in \Omega_d \wedge h \in \omega) \Rightarrow [k \in \omega \Leftrightarrow (h \subset k \vee k \subset h)].$$

Introducem o relație binară  $\uparrow$  pe  $\Omega_d$  spunînd că are loc  $\omega \uparrow \omega'$  dacă:

- $\sigma(\omega) = \sigma(\omega')$  și  $\omega = \omega'$ , sau
- $\sigma(\omega) \neq \sigma(\omega')$  și există  $[O; A]$  în  $\omega$  și  $[O'; A']$  în  $\omega'$  încît  $A$  și  $A'$  sînt în același semiplan delimitat de dreapta  $OO'$ .

Simbolul  $\omega \uparrow \omega'$  va fi citit: orientarea  $\omega$  este coerență cu orientarea  $\omega'$ . Pentru a conferi definiției date relației de coerență a orientărilor mai multă precizie vom da două formule în care va apărea și notația  $(OO'; A)$  introdusă în § 3, capitolul V, pentru semiplanul (deschis) delimitat de dreapta  $OO'$  și care conține punctul  $A$ :

$$(4.2) \quad \sigma(\omega) = \sigma(\omega') \Rightarrow [\omega \uparrow \omega' \Leftrightarrow \omega = \omega'];$$

$$(4.3) \quad \sigma(\omega) \neq \sigma(\omega') \Rightarrow [\omega \uparrow \omega' \Leftrightarrow \exists [O; A] \in \omega \exists [O'; A'] \in \omega':$$

$$(OO'; A) = (OO'; A')].$$

**Lema 4.1.** Dacă  $\omega \uparrow \omega'$  și  $\sigma(\omega) \neq \sigma(\omega')$  atunci, oricare ar fi semidreptele  $[U; B]$  în  $\omega$  și  $[U'; B']$  în  $\omega'$ , punctele  $B, B'$  sînt în același semiplan delimitat de dreapta  $UU'$ , adică

$$(4.4) \quad [\omega \uparrow \omega' \wedge \sigma(\omega) \neq \sigma(\omega')] \Rightarrow [U; B] \in \omega, \forall [U'; B'] \in \omega':$$

$$(UU'; B) = (UU'; B').$$

**Demonstrație.** Interpretăm afirmația  $\omega \uparrow \omega'$  conform (4.3) prin existența semidreptelor  $[O; A]$ ,  $[O'; A']$  incluse în același semiplan delimitat de  $(OO')$ . Într-o primă etapă înlocuim doar una din semidrepte:  $[O'; A']$  prin  $[U'; B']$ . Deoarece aceste semidrepte definesc aceeași orientare vor fi legate printr-o relație de incluziune. Fixăm ideile presupunînd  $[U'; B'] \subset [O'; A']$ . Urmează  $O' - U' - B'$  și  $U' \in \text{Int } AOO'$ . Prin propoziția 3.4 din capitolul V deducem că dreapta  $OU'$  taie segmentul  $AO'$  într-un punct  $M$ . Întrucît această dreaptă taie și latura  $O'B'$  în  $U'$  nu mai poate tăia și latura  $AB'$  (ar contrazice teorema 2.3, cap. V) deci  $A, B'$  sînt în același semiplan delimitat de  $(OU')$ . Demonstrația se încheie arătînd că, din motive de simetrie, nici înlocuirea semidreptei din  $\omega$  nu afectează valabilitatea condiției din relația (4.3) și (4.4).

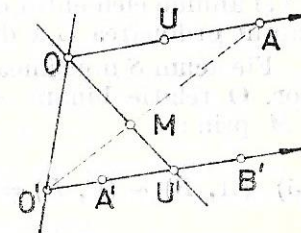


Fig. 21

**Teorema 4.2.** 1) Oricare ar fi dreapta  $d$ ,  $\uparrow$  este o echivalență în mulțimea  $\Omega_d$  a orientărilor dreptelor ce au aceeași direcție  $d$ . 2) Mulțimea cît  $\Omega_d/\uparrow$  conține exact două elemente (numite *sensuri* pentru direcția



[ $\bar{d}$ ]. 3) Oricare ar fi o clasă de echivalență  $s$  din  $\Omega_a/\uparrow$  și oricare ar fi o dreaptă  $a$  de direcție [ $\bar{d}$ ] există în  $s$  exact o orientare  $\omega$  ce are drept suport pe  $a$ .

**Demonstrație.** 1) Prin (4.1) se constată ușor că  $\uparrow$  este reflexivă și simetrică. Pentru tranzitivitate considerăm  $\omega \uparrow \omega'$  și  $\omega' \uparrow \omega''$ . Fie

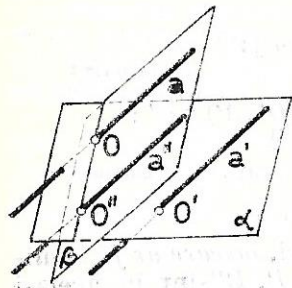


Fig. 22

$a, a', a''$  dreptele suport ale orientărilor  $\omega, \omega', \omega''$ . Dacă dreptele  $a, a', a''$  nu sînt coplanare considerăm pe ele punctele  $O, O', O''$  și fie  $\alpha$  planul ce conține aceste puncte. Considerăm apoi semidreptele  $[O; A) \in \omega, [O'; A') \in \omega', [O''; A'') \in \omega''$ . Dacă  $H$  este spațiul delimitat de  $\alpha$  ce conține  $A'$  urmează imediat că  $A$  și  $A''$  sînt în  $H$ . Ne restringem atenția la planul  $\beta$  ce conține  $a$  și  $a''$ ; în  $\beta$  dreapta  $OO''$  delimitează un semiplan ce conține  $A$  și  $A''$  deci are loc  $\omega \uparrow \omega''$ . Aceeași concluzie este valabilă și cînd  $a, a', a''$  sînt

coplanare, punctele  $O, O', O''$  putînd fi acum alese (conform lemei 4.1) coliniare, pentru a simplifica raționamentul. A fost astfel dovedită tranzitivitatea relației  $\uparrow$ , care este deci o echivalență.

Formula (4.2) conduce imediat la concluzia 3). Constatăm apoi că fiecare dintre cele două orientări opuse  $\omega$  și  $-\omega$  ale dreptei  $\bar{d}$  reprezintă clase  $s$  și  $-s$  din  $\Omega_a/\uparrow$ ; dacă în  $\Omega_a/\uparrow$  ar mai exista o clasă  $s'$  diferită de  $s$  și de  $-s$  aceasta ar avea un reprezentat  $\omega'$  avînd suportul  $\bar{d}$  ce nu ar putea coincide nici cu  $\omega$  și nici cu  $-\omega$ , absurd.

Vom încheia aceste considerații introducînd o notație ce se va dovedi utilă în cele ce urmează. Dacă  $A, B$  sînt puncte distincte putem pune în evidență un sens  $\overrightarrow{AB}$  (numit „sensul de la  $A$  spre  $B$ ”) și anume elementul din mulțimea cit  $\Omega_{(AB)}/\uparrow$  ce admite ca reprezentant ordonarea  $\omega$  a dreptei  $(AB)$  caracterizată prin  $[A; B) \in \omega$ .

Fie acum  $S$  mulțimea punctelor și  $\mathcal{B} = S \times S$  mulțimea bipunctelor. O relație binară  $\sim$ , numită de „echipolență”, se introduce în  $\mathcal{B}$  prin:

$$(4.5) \quad (A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow (A = B \wedge C = D) \vee [(A \neq B \wedge AB \equiv CD \wedge AB \parallel CD) \wedge \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}].$$

Conform celor de mai sus urmează imediat:

**Teorema 4.3.**  $\sim$  este o echivalență pe mulțimea  $\mathcal{B}$ .

Clasa de echivalență a bipunctului  $(A, B)$  în raport cu relația de echipolență  $\sim$  se numește **vector** și se notează prin  $\overrightarrow{AB}$ . În mod evident impropriu se spune uneori că  $A$  este „originea” și  $B$  este „extremitatea” vectorului  $\overrightarrow{AB}$ .

**Observație.** Pînă în acest moment nu am făcut referiri explicite la „dimensiunea” spațiului geometric euclidian ambiant; doar prin trimiterea la demonstrația tranzitivității relației de paralelism și prin analiza cazului dreptelor necoplanare din demonstrația dată lemei 4.1 am subînțeles că  $S$  ar fi mulțimea punctelor din spațiul euclidian tridimensional  $E_3$ . Desigur, dacă dorim să restringem construcția la un plan sau la o dreaptă, o parte din dificultățile tehnice dispar. Din punct de vedere fizic este utilă noțiunea de „vector alunecător” ce se poate obține particularizînd  $S$  drept mulțimea punctelor unei drepte (în acest caz vectorul putînd fi caracterizat prin „mărime” și „sens” întrucît direcția este unică pentru toți vectorii). Nu credem că există temeiuri pentru a introduce noțiunea matematică de „vector legat” ce ar coincide cu aceea de bipunct.

Apreciem drept mai avantajoasă din punct de vedere științific și didactic introducerea relației de echipolență (și a noțiunii de vector) prin construcția ce o schițăm mai jos.

Fie funcția  $g: S \times S \rightarrow S$  definită prin:  $g(A, B)$  este mijlocul segmentului  $AB$ ; (în particular  $g(A, A) = A$ ). Să introducem acum echipolența  $\sim$  drept relație binară pe mulțimea  $\mathcal{B}$  a bipunctelor prin:

$$(4.6) \quad (A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow g(A, D) = g(C, B).$$

Mulțimea cit  $V = \mathcal{B}/\sim$  se numește **spațiu vectorial**. Denumirea este ușor de justificat, constatînd că pentru noțiunea de vector astfel introdusă se verifică proprietățile 1°–7° din cap. IV, § 1 și 2. În acest scop se impune să mai fie definit vectorul  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ , unde  $\alpha$  este un număr real arbitrar.

– Dacă  $B = A$  sau  $\alpha = 0$ , prin definiție  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ .

– Dacă  $B \neq A$  și  $\alpha \neq 0$  are loc  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ , punctul  $C$  fiind pe dreapta  $(AB)$ , satisfăcînd  $d(A, C) = |\alpha| \cdot d(A, B)$  și fiind unic determinat prin condiția  $C \in (A; B) \Leftrightarrow \alpha > 0$ .

Atragem atenția doar că proprietatea de distributivitate a produsului cu scalari față de suma vectorilor constituie exprimarea condensată a teoremei fundamentale a asemănării.

Mai mult, definind pe  $V$  produsul scalar  $\cdot$  prin  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = d(A, B) \cdot d(A, C) \cdot \cos \widehat{BAC}$ , constatăm că sînt îndeplinite condițiile 1°–4° din cap. IV, § 2, deci pe  $V$  se introduce în mod natural structura de spațiu (vectorial) euclidian.



## § 5. TRANSLAȚII

Fie  $A, A'$  puncte ale spațiului euclidian  $E_3$ . Numim *translație de vector*  $\overline{AA'}$  transformarea  $T: E_3 \rightarrow E_3$  definită prin  $T(M) = M' \Leftrightarrow \overline{AA'} = \overline{MM'}$ . În cazul particular  $A = A'$  este evident că translația de vector  $\overline{AA'}$  este transformarea identică a lui  $E_3$ .

Vom folosi același termen de translație de vector  $\overline{AA'}$  și pentru restricții ale transformării  $T$  mai sus definite la submulțimi proprii  $\mathcal{S}$  ale lui  $E_3$  invariante de  $T$ ; iată câteva exemple de astfel de mulțimi:

- 1° un semispațiu mărginit de un plan paralel cu  $(AA')$ ;
- 2° un plan paralel cu  $(AA')$ ;
- 3° mulțimi obținute intersectînd mulțimi de tipul caracterizat mai sus între care putem cita interioare de unghiuri diedre sau semiplane delimitate de drepte paralele cu  $(AA')$ .

**Teorema 5.1.** *Orice translație este o izometrie; inversa unei translații este o translație; compunerea a două translații de vectori  $\vec{u}, \vec{v}$  este translația de vector  $\vec{u} + \vec{v}$ .*

**Teorema 5.2.** *O translație  $T$  de vector  $\vec{u}$  nenul nu are puncte fixe, conservă dreptele a paralele cu  $\vec{u}$  (și numai pe acestea), planele  $\alpha$  paralele cu  $\vec{u}$  și nu conservă cercuri sau sfere.*

**Teorema 5.3.** *Compunerea  $S_2 \circ S_1$  a două simetrii în raport cu axe paralele  $d_1, d_2$  este o translație de vector  $\vec{u}$  perpendicular pe  $d_1$ , avînd mărimea egală cu dublul distanței între  $d_1$  și  $d_2$  și sensul de la  $d_1$  spre  $d_2$ . Orice translație se descompune în produs de simetrii.*

**Demonstrație.** Examinăm pentru început cazul cînd  $\mathcal{S}$  este un plan. Să considerăm  $OO_1 \perp d_1$ ,  $O \in d_1$  și o axă  $Ox$  orientată de la  $O$  spre  $O_1 \in d_2$ . Fie și  $O_2$  simetricul lui  $O$  față de  $O_1$ . Să presupunem  $O_1(a, 0)$ . Prin simetria  $S_1$  punctul  $A(x, y)$  trece în  $A'(x'y')$ , unde evident,  $x' = -x$ ,  $y' = y$ . Prin simetria  $S_2$  punctul  $A'(x'y')$  trece în  $A''(x'', y'')$ , unde  $x'' = 2a - x' = 2a + x$  și  $y'' = y' = y$ . Transformarea  $T = S_2 \circ S_1$  conduce  $A(x, y)$  în  $A''(x + 2a, y)$  deci este translația de vector  $\overline{AA''} = \overline{OO_2}$ .

Dacă  $\mathcal{S}$  coincide cu  $E_3$  pentru punctul arbitrar  $A$  vom considera planul  $\alpha$

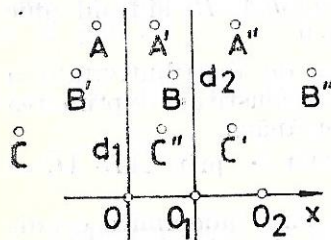


Fig. 23

incident cu  $A$  și perpendicular pe  $\vec{d}_1$ . Fie  $U, U_1$  punctele în care  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$  înțepă  $\alpha$ . Cu aceleași notații de mai sus se constată ușor că  $UU_1$  este linie mijlocie în triunghiul  $A'AA''$  și deci  $\overline{AA''} = 2 \cdot \overline{UU_1}$ . Vectorul  $\overline{UU_1}$  nu depinde de punctul  $A$  deci concluzia teoremei este dovedită.

O exprimare analitică simplă a transformării  $T = S_2 \circ S_1$  se obține luînd  $d_1$  drept axă  $Oz$  (deci  $d_1$  are ecuații  $x = y = 0$ ) și  $d_2$  inclusă în planul  $xOz$  ( $d_2$  de ecuații  $x = a = 0 = y$ ). Atunci pentru  $A(x, y, z)$  punctul  $T(A)$  are coordonate  $(x + 2a, y, z)$ .

Mai general translația  $T$  de vector  $a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$  duce punctul  $M(x, y, z)$  în  $M'(x', y', z')$ , unde  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$ ,  $z' = z + c$ .

## § 6. ROTAȚII

Pentru definirea noțiunii din titlu este necesară noțiunea de *unghi orientat*. Pentru cititorul ce apreciază că intuiește în mod corect această noțiune, lectura aliniatelor ce urmează poate fi amînată.

Fie  $\pi$  un plan euclidian fixat și  $O$  un punct din  $\pi$ . Considerăm mulțimea  $L$  a semidreptelor de origine  $O$  din  $\pi$ . Reamintim că un unghi (neorientat) de vîrf  $O$  este o submulțime  $\widehat{h, k} = \{h, k\}$  a lui  $L$  alcătuită din două elemente. Fie  $\mathcal{U}_0$  mulțimea acestor unghiuri. Mai reamintim că am introdus în capitolul precedent măsura în grade a unghiurilor ce admite o restricție  $m: \mathcal{U}_0 \rightarrow [0, 180]$ .

Numim *unghi orientat de vîrf  $O$*  un element  $u = (u_1, u_2)$  al mulțimii  $\mathbf{U}_0 = L \times L$ . Pe mulțimea  $\mathbf{U}_0$  se introduce relația binară  $\approx$  „de congruență a unghiurilor orientate” prin condiția:  $(u_1, u_2) \approx (v_1, v_2)$  dacă există o simetrie  $S$  față de o dreaptă (ce trece prin  $O$  și este în  $\pi$ ) încît  $S(u_1) = v_2$  și  $S(u_2) = v_1$ . Se demonstrează ușor:

**Teorema 6.1.** *Oricare ar fi  $u_1, u_2, v_1$  în  $L$  există un element unic  $v_2$  în  $L$  încît  $(u_1, u_2) \approx (v_1, v_2)$ .*

Mai puțin ușor se demonstrează că  $\approx$  este tranzitivă pentru a ne asigura că este echivalență dar în construcția ce o prezentăm această concluzie nu este încă necesară iar ulterior va putea beneficia de o demonstrație simplă.

Presupunem fixat un element  $c = (a, b)$  din  $\mathbf{U}_0$  ce satisface condiția că  $\widehat{a, b}$  este unghi propriu. Fie  $H$  semiplanul delimitat de dreapta suport a lui  $a$  ce conține  $b - \{O\}$ . Pentru orice unghi orientat  $u = (u_1, u_2)$  vom determina conform teoremei 6.1 o semidreaptă unică  $u^*$  încît  $u \approx (a, u^*)$ .

Vom defini acum o funcție  $\star: \mathbf{U}_0 \rightarrow (-\pi, +\pi]$  ce va constitui „măsura în radiani a unghiurilor orientate” precizînd valoarea  $\hat{u} = \star(u_1, u_2)$  în toate eventualitățile posibile.

— dacă  $u^* = a$ , atunci  $\hat{u} = 0$

— dacă  $u^*$  este semidreapta opusă lui  $a$ , atunci  $\hat{u} = \pi$ ;

— dacă  $u^*$  este în  $H$ , atunci  $\hat{u} = \frac{\pi}{180} m(\widehat{a, u^*})$ ;

— dacă  $u^*$  nu este inclusă în  $a \cup H$ , atunci  $u = -\frac{\pi}{180} m(\widehat{a, u^*})$ .



Printr-o translație de vector  $\overrightarrow{OC}$  obținem o bijecție a lui  $U_0$  în  $U_C$  pentru care acceptăm prin definiție că păstrează orientările și măsura unghiurilor orientate. Alegerea unghiului orientat  $c$  de mai sus se realizează prin convenția bine cunoscută a „sensului trigonometric”; în cadrul acestei convenții se utilizează un concept intuitiv de „rotație în sens invers mersului acelor ceasornicului” care nu afectează definiția riguroasă a conceptului de rotație.

Considerăm deosebit de importantă operația de adunare a unghiurilor orientate ce va beneficia de simbolul  $\oplus$ ; prin definiție  $(u_1, u_2 \oplus (v_1, v_2)) = (u_1, w)$ , unde semidreapta  $w$  este unic determinată prin condiția  $(v_1, v_2) \approx (u_2, w)$  avind semnificație geometrică ușor de intuit. Se constată ușor că operației geometrice considerate îi corespunde o operație algebrică ce o vom desemna prin același simbol  $\oplus$  încât  $a \oplus b$  este singurul număr real de forma  $a + b + 2k\pi$  situat în  $(-\pi, \pi]$ ,  $k$  fiind în  $\mathbb{Z}$ .

Fie în planul  $\pi$  un punct  $O$  și o măsură  $\hat{u}$  de unghi orientat; numim *rotație de centru  $O$  și unghi orientat  $u$*  o transformare  $R$  a lui  $\pi$  în el însuși (notată uneori și  $R_{O, \hat{u}}$  pentru a preciza elementele definitorii) ce asociază punctul arbitrar  $M$  punctului  $M' = R(M)$  caracterizat prin condițiile:  $1^\circ OM' \equiv OM$  și  $2^\circ \angle MOM' = \hat{u}$  (Trebuie observat că, pentru  $M = O$ , din  $1^\circ$  rezultă  $M' = O$  și condiția  $2^\circ$  nu mai este necesară dar nici nu are vreo semnificație). În cazul  $\hat{u} = 0$ , rotația  $R$  coincide în transformarea identică; pentru  $\hat{u} = \pi$ ,  $R$  este simetria față de punctul  $O$ . Dacă  $\hat{u} \neq 0$  și  $\hat{u} \neq \pi$  spunem că  $R_{O, \hat{u}}$  este *rotație proprie*.

**Teorema 6.1.** Orice rotație a planului  $\pi$  este o izometrie;  $(R_{O, \hat{u}})^{-1} = R_{O, -\hat{u}}$ ;  $R^{-1} = R$  dacă și numai dacă  $R$  este transformare identică sau simetrie față de un punct;  $R_{O, \hat{u}} \circ R_{O, \hat{v}} = R_{O, \hat{u} \oplus \hat{v}}$ .

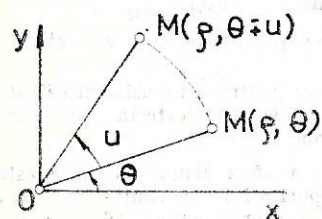


Fig. 24

Pentru a demonstra cât mai expeditiv această teoremă vom considera un reper polar de axă  $Ox$ . Punctului  $M(\rho, \theta)$  îi corespunde prin  $R_{O, \hat{u}}$  punctul  $M'(\rho, \theta \oplus \hat{u})$ . Constatarea veridicității afirmațiilor din enunț în cadrul acestui reper polar este imediată.

În reperul cartezian  $(Ox, Oy)$  asociat reperului polar considerat, coordonatele  $(x, y)$  ale lui  $M$  sînt date prin  $x = \rho \cdot \cos \theta$ ,  $y = \rho \cdot \sin \theta$ . Pentru coordonatele  $(x', y')$  ale lui  $M'$  obținem imediat:

$$x' = x \cdot \cos \hat{u} - y \cdot \sin \hat{u}, \quad y' = x \cdot \sin \hat{u} + y \cdot \cos \hat{u}.$$

**Teorema 6.2.** O rotație proprie  $R = R_{O, \hat{u}}$  admite un singur punct fix  $O$ , nu admite drepte fixe și invariază cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  dacă și numai

dacă  $C = O$ . (Precizăm că pentru o dreaptă arbitrară  $d$ , dreapta imagine  $R(d) = d'$  formează cu  $d$  unghiuri dintre care cel puțin unul este egal cu  $|\hat{u}|$ ).

**Teorema 6.3.** Compunerea a două simetrii  $S_1, S_2$  ale planului  $\pi$  față de axe  $d_1, d_2$  secante în  $O$  este o rotație de centru  $O$ ; orice rotație  $R$  se poate scrie drept produs de simetrii ale planului.

**Demonstrație.** Fie  $Ox$  o semidreaptă arbitrară luată drept axă polară. Fie  $a$  unghiul dreptelor  $d_1, d_2$  și să considerăm că axa  $Ox$  formează cu dreptele  $d_1, d_2$  unghiuri  $\alpha$  respectiv  $\alpha \oplus \alpha$ . Să considerăm punctul  $M$  de coordonate polare  $\rho$  și  $\theta$ . Urmează imediat că  $M' = S_1(M)$  are coordonate polare  $\rho$  și  $\theta' = 2\alpha \ominus \theta$ ; punctul  $M'' = S_2(M')$  va avea coordonate polare  $\rho$  și  $\theta'' = 2(\alpha \oplus \alpha) - \theta' = 2\alpha \oplus \theta$ . Conchidem că transformarea  $S_2 \circ S_1$  este rotație de centru  $O$  și unghi  $2\alpha$ . Utilitatea considerării unghiurilor  $\alpha, \theta, \alpha$  din demonstrație ca orientate este evidentă; am considerat  $\ominus$  drept operație opusă adunării  $\oplus$  și înmulțirea prin 2 drept „adunare repetată”.

Fiind dată rotația  $R$  de centru  $O$  vom considera o semidreaptă arbitrară  $s_1$  de origine  $O$ ; fie  $R(s_1) = s'$  și  $s_2$  semidreapta ce bisectează  $\angle(s_1, s')$ . Fie  $d_1, d_2$  dreptele suport ale lui  $s_1, s_2$ ; notînd prin  $S_1, S_2$  simetriile de axe  $d_1, d_2$  se constată ușor că are loc  $R = S_2 \circ S_1$ .

**Teorema 6.4.** Dacă  $T$  este o translație de vector nenul iar  $R$  și  $R'$  rotații proprii ale planului  $\pi$ , atunci  $T \circ R$  și  $R \circ T$  sînt rotații distincte iar  $R \circ R'$  este rotație sau translație.

**Demonstrație.** Ideea de explicitare a transformării  $T \circ R$  este de a determina simetrii  $S_1, S_2, S_3$  față de axe  $d_1, d_2, d_3$  încît  $R = S_2 \circ S_1$ ,  $T = S_3 \circ S_2$  și ca urmare  $T \circ R = S_3 \circ S_1$ . Fie  $R =$

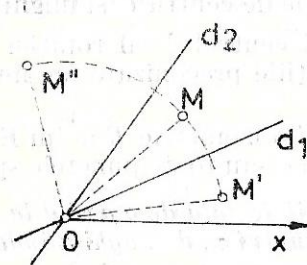


Fig. 25

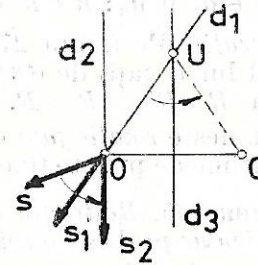


Fig. 26

$= R_{O, \hat{u}}$  și fie  $T(O) = O'$ . Cazul  $O' = O$  este exclus. Fie  $s_2$  o semidreaptă de origine  $O$  perpendiculară pe  $OO'$  și  $s = R^{-1}(s_2)$ . Considerăm bisectoarea  $s_1$  a unghiului  $\angle s, s_2$ . Vom nota prin  $d_1, d_2$  dreptele



suport ale lui  $s_1$ ,  $s_2$  și prin  $d_3$  mediatoarea segmentului  $OO'$ . Sînt îndeplinite condițiile enunțate în cadrul expunerii de idee din preambulul demonstrației. Prin urmare  $T \circ R$  este rotația de centru

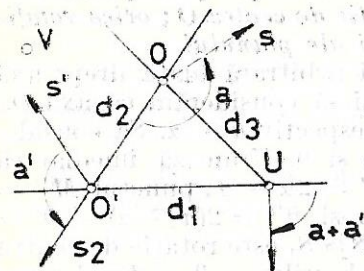


Fig. 27

$U$  (în care se taie  $d_1$  cu  $d_3$ ) și unghi orientat  $\hat{a}$  (același cu al rotației  $R$ ). Situația  $d_1 \parallel d_3$  este echivalentă cu  $d_1 = d_3$  și impune ca  $R$  să fie transformare identică.

Pentru a explicita  $R \circ T$  vom observa  $(R \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ R^{-1}$  și am revenit astfel la problema inițială. Vom constata că  $R \circ T$  este o rotație  $R_{U, a'}$ , unde  $V = T^{-1}(U)$ , punctul  $U$  fiind cel descris mai sus. Constatăm:  $R \circ T = T \circ R \Leftrightarrow U = V \Leftrightarrow T = I$ .

Pentru a explicita  $R \circ R'_{O, \hat{a}}$  să presupunem  $R = R_{O, \hat{a}}$  și  $R' = R_{O', \hat{a'}}$ . Dacă  $O = O'$ , atunci  $R \circ R' = R' \circ R = R_{O, \hat{a} \mp \hat{a'}}$  conform teoremei 1. Presupunem  $O \neq O'$  și fie  $s_2$  o semidreaptă de origine  $O'$  situată pe  $d_2 = (OO')$ . Determinăm  $s'$  încît  $R'(s') = s$  și fie  $d_1$  dreapta suport a bisectoarei unghiului format de  $s_2$  și  $s'$ . Mai considerăm și dreapta suport  $d_3$  a bisectoarei unghiului format de  $[O; O']$  și  $s$ . Considerăm și simetriile  $S_i$  față de dreptele  $d_i$  (pentru  $i = 1, 2, 3$ ). Rezultă  $R' = S_2 \circ S_1$ ,  $R = S_3 \circ S_2$  și deci  $R \circ R' = S_3 \circ S_1$ . Are loc  $R \circ R' = \text{translație}$  dacă și numai dacă  $d_3 \parallel d_1$  adică  $\hat{a} \mp \hat{a'} = 0$ ; în acest caz translația aplică  $O$  în  $O'' = R(O)$ . Dacă  $\hat{a} \mp \hat{a'} \neq 0$  fie  $U \in d_1 \cap d_3$ ;  $R \circ R'$  este rotație de centru  $U$  și unghi  $\hat{a} \mp \hat{a'}$ .

**Observație.** Pe figura 27 apare și centrul  $V$  al rotației  $R' \circ R$ , simetricul lui  $U$  față de  $(OO')$ ; condițiile preconizate fac imposibilă egalitatea  $R \circ R' = R' \circ R$ .

Se numește *rotație față de o axă*  $d$  o izometrie  $R$  a lui  $E_3$  ce are drept mulțime de puncte fixe: dreapta  $d$  sau toate punctele spațiului.

**Teorema 6.5.** *Restricția unei rotații  $R$  față de o axă  $d$  la un plan  $\pi$  perpendicular pe  $d$  este o rotație a planului  $\pi$ , de unghi  $\hat{a}$  independent de alegerea lui  $\pi$ . Fiecare rotație a unui plan se extinde la o rotație față de o axă.*

**Demonstrație.** Fie  $O$  punctul comun lui  $d$  și  $\pi$ . Pentru  $M$  arbitrar în  $\pi$  are loc  $OM \perp d$ ; dacă  $M' = R(M)$  urmează  $OM' \perp d$  și deci  $M' \in \pi$ . Prin urmare  $R(\pi) \subset \pi$ . Dacă  $N$  este arbitrar în  $\pi$ ,  $R$  fiind surjectivă va exista un punct  $N_1$  încît  $R(N_1) = N$  și  $N_1$  se va găsi

evident în  $\pi$ . Am dovedit deci  $R(\pi) = \pi$ . Fie  $R_\pi$  restricția lui  $R$  la  $\pi$ . Evident,  $R_\pi$  este o izometrie a lui  $\pi$  ce conservă punctul  $O$ , deci este o rotație  $R_{O, \hat{a}}$  a planului  $\pi$ .

Fie  $\alpha$  un semiplan delimitat de dreapta  $d$ . Imaginea sa prin izometria  $R$  este un semiplan  $\beta = R(\alpha)$  delimitat de aceeași dreaptă  $d$ . Unghiul diedru  $\alpha, \beta$  este secționat de un plan  $\pi$  perpendicular pe  $d$  după un unghi plan a cărui mărime și orientare nu depinde de alegerea lui  $\pi$ .

Pentru o rotație  $R_{O, \hat{a}}$  a unui plan  $\pi$  vom defini o transformare  $T: E_3 \rightarrow E_3$  precizînd imaginea  $M' = T(M)$  a unui punct generic  $M \in E_3$ . Considerăm proiecția ortogonală  $N$  a lui  $M$  în planul  $\pi$  și punctul  $N' = R_{O, \hat{a}}(N)$ ;  $M'$  se definește prin condiția ca  $\overline{NM} = \overline{N'M'}$ . Evident, pentru  $M \in \pi$  se ia  $T(M) = R_{O, \hat{a}}(M)$ . Se constată ușor că  $T$  este izometrie ce conservă toate punctele dreptei  $d$  perpendiculară în  $O$  pe planul  $\pi$ . Dacă  $T$  mai admite un punct fix  $A \notin d$ , atunci și  $R_{O, \hat{a}}$  mai admite ca punct fix proiecția ortogonală  $B$  a lui  $A$  în  $\pi$ , deci  $\hat{a} = O$  etc.

**Teorema 6.6.** *Orice rotație  $R$  față de o dreaptă  $d$  se poate prezenta într-o infinitate de moduri drept compunere de două simetrii față de plane prin dreapta  $d$ .*

Într-adevăr, restricția lui  $R$  la un plan  $\pi \perp d$  este o rotație plană  $R_{O, \hat{a}}$  ce se exprimă conform teoremei 6.3 drept compunere de simetrii față de dreptele  $b, c$  secante în  $O$ :  $R_{O, \hat{a}} = S_c \circ S_b$ . Fie  $\beta, \gamma$  planele prin  $d$  ce conțin  $b$  respectiv  $c$ ; se constată ușor  $R = S_\gamma \circ S_\beta$ , unde  $S_\beta, S_\gamma$  sînt simetrii față de planele „indice”.

## § 7. OMOTETII

Fie un punct  $O$  și un număr real nenul  $k$ ; se numește *omotetie de centru  $O$  și raport  $k$*  transformarea  $H$  a planului  $\pi$  în el însuși (sau a spațiului  $E_3$  în el însuși) ce asociază fiecărui punct  $M$  punctul  $M' = H(M)$  definit prin  $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$ .

Pentru  $k > 0$  spunem că  $H$  este omotetie *directă*; pentru  $k < 0$  — omotetie *indirectă*. Originea denumirii este grecească: homo = la fel, thesis = poziție; avînd în vedere și această etimologie este de înțeles că uneori denumirea acestui tip de transformări este redactată sub forma „homotetie”. Vom folosi și notația  $H(O, k)$



pentru a preciza centrul  $O$  și raportul  $k$ . Pentru  $k = 1$  omotetia este evident transformare identică iar pentru  $k = -1$  obținem simetria față de un punct.

**Teorema 7.1.** Pentru orice omotetie  $H$  de raport  $k$ , din  $H(M) = M'$  și  $H(N) = N'$  rezultă  $(MN) \parallel (M'N')$  și  $M'N' = |k| \cdot MN$ .

**Teorema 7.2.** Orice omotetice  $H(O, k)$  este bijectivă; inversa ei are același centru și raport egal cu  $k^{-1}$ .

**Teorema 7.3.** Dacă notăm cu accent imaginile prin omotetia  $H = H(O, k)$  ale punctelor au loc proprietățile următoare pentru  $H$ :

- 1° duce o dreaptă  $(AB)$  într-o dreaptă paralelă  $(A'B')$ ;
- 2° duce semidreapta  $(A; B)$  în semidreapta  $(A'B')$ ;
- 3° duce „segmentul”  $|AB|$  în „segmentul”  $|A'B'|$ ;
- 4° duce semiplanul  $(d; A)$  în semiplanul  $(d'; A')$ , unde  $d' = H(d)$ ;
- 5° duce cercul  $\mathcal{C}(C, r)$  în cercul  $\mathcal{C}'(C', |k| \cdot r)$ ;
- 6° duce un arc de cerc  $\widehat{ABC}$  în arcul de cerc  $\widehat{A'B'C'}$ .

**Teorema 7.4.** Dacă  $\mathcal{C}'$  este imaginea unui cerc  $\mathcal{C}$  într-o omotetie  $H$  de centru  $O$ , atunci orice dreaptă  $d$  ce trece prin  $O$  taie simultan  $\mathcal{C}$  și  $\mathcal{C}'$ : unghiurile sub care taie aceste cercuri sînt congruente.

*Demonstrație.* Dacă există  $M$  comun lui  $\mathcal{C}$  și  $d$ , atunci  $M' = H(M)$  va fi evident comun lui  $\mathcal{C}'$  și  $d$ . În această ipoteză triunghiurile  $OMC$  și  $OM'C'$  sînt asemenea, deci  $OM \parallel O'M'$ . Rezultă imediat că tangentele  $t, t'$  duse în  $M, M'$  la cercurile  $\mathcal{C}$  respectiv  $\mathcal{C}'$  sînt paralele. Unghiurile formate de  $d$  cu  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  sînt prin definiție egale cu unghiurile formate de  $d$  cu  $t, t'$  și acestea sînt congruente ca unghiuri corespondente.

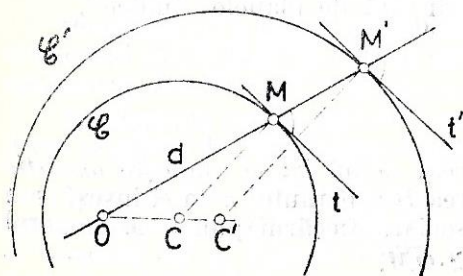


Fig. 28

**Teorema 7.5.** Într-un reper cartezian în cadrul căruia centrul  $C$  al omotetiei  $H(C, k)$  admite coordonate  $(a, b)$ , punctul  $M(x, y)$  este transformat în  $M'(x', y')$ , unde  $x' = kx + (1 - k)a$ ,  $y' = ky + (1 - k)b$ .

**Teorema 7.6.** Fie  $H$  omotetia de centru  $O$  și raport  $k \neq 1$  iar  $T$  translația de vector  $\bar{u}$ . Au loc egalitățile  $T \circ H = H(O', k)$  și  $H \circ T = H(O'', k)$  unde  $(k - 1) \cdot \overrightarrow{OO'} = \bar{u}$ ,  $(k - 1) \cdot \overrightarrow{OO''} = k \cdot \bar{u}$ .

**Teorema 7.7.** Dacă  $h \cdot k \neq 1$  are loc  $H(D, h) \circ H(C, k) = H(E, kh)$  unde  $h(k - 1)\overrightarrow{EC} = (1 - h)\overrightarrow{ED}$ . Dacă  $hk = 1$ ,  $H(D, h) \circ H(C, k)$ , este translație de vector  $(1 - h)\overrightarrow{CD}$ .

*Demonstrația* va analiza pentru început cazul  $C = D$ . Fie  $M$  arbitrar și  $N = H(C, k)(M)$ ,  $P = H(D, h)(N)$ . Urmează  $\overrightarrow{CM'} = k \cdot \overrightarrow{CM}$ ,  $\overrightarrow{CP} = h \cdot \overrightarrow{CN}$ , deci  $\overrightarrow{CP} = (k \cdot h) \cdot \overrightarrow{CM}$ , adică  $P = [H(D, h) \circ H(C, k)](M) = H(C, kh)(M)$  și egalitatea de transformări din enunț este verificată (pentru  $hk \neq 1$ ) când  $E = C$ . Dacă  $hk = 1$ ,  $H(C, kh)$  este transformarea identică deci coincide și cu translația de vector nul. (Acest caz particular,  $C = D$ , va fi reformulat în corolarul 1 al acestei teoreme.)

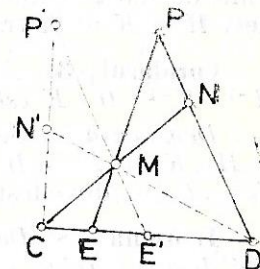


Fig. 29

Pentru  $C \neq D$  luăm  $M$  nesituat pe  $(CD)$  și punctele  $N, P$  definite ca mai sus. Cu teorema lui Thales constatăm ușor  $MP \parallel CD \Leftrightarrow hk = 1$ . În ipoteza  $hk \neq 1$  va exista deci un punct  $E$  comun dreptelor  $CD$  și  $PM$ . Cu relația lui Menelaos pentru triunghiul  $CND$  și transversala  $(PM)$  găsim caracterizarea din enunț a punctului  $E$ , ce îi probează și independența de punctul ales  $M$ . Aceeași relație a lui Menelaos aplicată triunghiului  $PMN$  și transversalei  $(CD)$  asigură  $\overrightarrow{EP} = hk \cdot \overrightarrow{EM}$ , adică  $P = H(E, hk)(M)$  etc.

În fine, dacă  $C \neq D$  dar  $hk = 1$ , prin teorema fundamentală a asemănării găsim  $\overrightarrow{MP} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \overrightarrow{CD} = (1 - h) \cdot \overrightarrow{CD}$  și urmează a doua parte a concluziei teoremei.

**Corolarul 1.** Pentru orice punct  $C$ , omotetiile de centru  $C$  formează (în raport cu compunerea) un grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

**Corolarul 2.** Dacă  $H, K$  sînt omotetii diferite de transformarea identică are loc  $H \circ K = K \circ H$  dacă și numai dacă centrele acestor omotetii coincid.

*Demonstrație.* Pe figura 29 apare și centrul  $E'$  al omotetiei  $H(C, k) \circ H(D, h)$  în ipoteza  $C \neq D$  și  $hk \neq 1$ . Se constată ușor  $E \neq E'$  pe baza caracterizării din enunțul teoremei a punctului  $E$ .



și a caracterizării analoage pentru  $E' : k(h-1)\overline{E'D} = (1-k)\overline{E'C}$ . Într-adevăr,  $E=E'$  ar reveni la  $\frac{k(h-1)}{1-k} = \frac{1-k}{h(k-1)}$ , adică  $h \cdot k = 1$ , contrar ipotezei.

Pentru  $C \neq D$  și  $h \cdot k = 1$  cele două compuneri de omotetii sînt translații de vectori  $(1-h)\overline{CD}$  și respectiv  $(1-k)\overline{DC}$  ce ar coincide dacă și numai dacă  $h+k=2$ , ce ar implica  $h=k=1$ , deci  $H$  și  $K$  ar fi transformări identice, absurd.

**Corolarul 3.** Pentru orice omotetie  $H$ ,  $K$  transformarea  $H^{-1} \circ K^{-1} \circ H \circ K$  este translație.

*Demonstrație.* Se explicitează că mai sus transformările  $T_1 = H \circ K$  și  $T_2 = H^{-1} \circ K^{-1} = (K \circ H)^{-1}$  iar în final compunerea  $T_2^{-1} \circ T_1$  se dovedește a fi translație.

**Teorema 7.8.** Dacă  $S$  este o simetrie (față de o dreaptă  $d$ , sau față de un plan  $\alpha$ , sau față de un punct  $U$ ) iar  $H$  este omotetia de centru  $O$  și raport  $k$ , avînd același domeniu și codomeniu cu  $S$ , atunci  $S \circ H \circ S$  este o omotetie de centru  $O' = S(O)$  și raport  $k$ .

*Demonstrația* este imediată. Pentru un punct arbitrar  $A$  fie  $B = S(A)$ ,  $C = H(B)$ ,  $D = S(C)$ . Din  $C = H(B)$  urmează  $\overline{OC} = k \cdot \overline{OB}$ . Prin simetria  $S$  această relație devine  $\overline{O'D} = k \cdot \overline{O'A}$  adică  $D = H'(A)$ , unde  $H' = H(O'k)$ . Prin urmare  $S \circ H \circ S(A) = H'(A)$  etc.

**Corolar.** Dacă  $T$  este o izometrie și  $H$  o omotetie a planului sau spațiului tridimensional euclidian, există o omotetie  $H'$  (avînd același raport ca și  $H$ ) încît  $T \circ H = H' \circ T$ .

*Demonstrație.* Dacă  $T$  și  $H$  sînt transformări ale planului euclidian, putem exprima conform teoremei 3.6 izometria  $T$  drept compunere de simetrii față de drepte,  $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ . Conform teoremei, găsim succesiv omotetii  $H_i$  încît  $T \circ H = S_3 \circ S_2 \circ S_1 \circ H = S_3 \circ S_2 \circ H_1 \circ S_1 = S_3 \circ H_2 \circ S_2 \circ S_1 = H_3 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = H_3 \circ T$ , q.e.d.

Dacă  $T$  și  $H$  sînt transformări ale lui  $E_3$ ,  $T$  se prezintă sub forma unei compuneri de cel mult patru simetrii față de plane și demonstrația decurge analog.

Pentru  $n=2$  sau  $n=3$  vom folosi notația  $G_n$  pentru mulțimea transformărilor  $U = T \circ H$ , unde  $T$  este o izometrie a spațiului euclidian  $E_n$  iar  $H$  o omotetie a aceluiași spațiu.

**Teorema 7.9.** Pentru  $n=2$  și  $n=3$ ,  $(G_n, \circ)$  este grup.

*Demonstrație.* Fie  $U_1 = T_1 \circ H_1$  și  $U_2 = T_2 \circ H_2$  elemente din  $G_n$ . Conform corolarului teoremei 7.8 constatăm:  $U_1 \circ U_2 = T_1 \circ (H_1 \circ T_2) \circ H_2 = T_1 \circ (T_2 \circ H') \circ H_2 = (T_1 \circ T_2) \circ (H' \circ H_2)$ . Conform teoremei 7.7 există eventualitatea ca  $H' \circ H_2$  să fie o omotetie  $K$  sau o translație  $T_3$ . În ambele cazuri vom deduce  $U_1 \circ U_2 = T \circ H$ : în primul caz  $T = T_1 \circ T_2$  și  $H = K$  iar în al doilea  $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$  iar  $K$  este transformarea identică. Transformarea identică  $I$  se exprimă  $I = I_1 \circ I_2$ , unde  $I_1$  este transformarea identică privită ca izometrie iar  $I_2$  este transformarea identică privită ca omotetie. Mai constatăm  $(T \circ H)^{-1} = (H' \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ (H')^{-1}$  (notațiile fiind cele din corolarul de mai sus) și deci elementele din  $G_n$  au inverse în  $G_n$ , q.e.d.

*Observații.* Grupul  $G_n$  se numește grupul asemănărilor. Toate noțiunile primare din sistemul axiomatic al lui Hilbert (punct, dreaptă, plan, incidența, „a fi între”, congruența) sînt conservate de grupul  $G_n$ . Pentru sistemul axiomatic al lui Birkhoff propoziția de mai sus nu mai este adevărată, distanța fiind conservată doar de subgrupul izometriilor strict conținute în  $G_n$ .

## § 8. INVERSIUNI

Fie  $\mathcal{C}(P, r)$  un cerc situat în planul  $\pi$ ; se numește *inversiune față de  $\mathcal{C}$*  transformarea  $T: \pi - \{P\} \rightarrow \pi - \{P\}$  ce aplică  $M$  în  $M' = T(M)$  caracterizat prin  $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = r^2$  (subînțelegînd și coliniaritatea punctelor  $P, M, M'$ ). Se mai spune că  $T$  este inversiunea de pol  $P$  și putere  $r^2$ , frază rezumată de notația  $T = \mathcal{I}(P, r^2)$ .

**Teorema 8.1.** O inversiune față de cercul  $\mathcal{C}$  este involutivă. Punctele ei fixe alcătuiesc cercul  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 8.2.** Dacă  $M', N'$  sînt imaginile punctelor  $M, N$  în inversiunea  $T = \mathcal{I}(P, r^2)$  și  $P \notin (MN)$ , atunci  $\triangle PMN \sim \triangle PN'M'$  și  $M'N' = r^2 \cdot \frac{MN}{PM \cdot PN}$ . Punctele  $M, N, M', N'$  sînt situate pe un cerc  $\mathcal{O}$  ortogonal cercului  $\mathcal{C}(P, r)$ .

*Demonstrație.* Din  $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \overline{PN} \cdot \overline{PN'}$  rezultă  $\frac{PM}{PN'} = \frac{PN}{PM'}$  și apoi  $\triangle PMN \sim \triangle PN'M'$ . Din proporționalitatea laturilor rezultă:  $M'N' = \frac{MN \cdot PM'}{PN} = PM \cdot PM' \cdot \frac{MN}{PM \cdot PN}$  etc. Fie  $\mathcal{O}(O, R)$  cercul prin  $M, N$  și  $N'$ ; deducem că  $M' \in \mathcal{O}$  din puterea



punctului  $P$  sau prin sumarea unghiurilor opuse. Fie  $(PS)$  tangentă la  $\mathcal{O}$  și  $S \in \mathcal{O}$ ;  $PS^2 = \overline{PM} \cdot \overline{PN} = r^2$ , deci  $S \in \mathcal{C}$ , adică  $PS \perp SO$ , q.e.d.

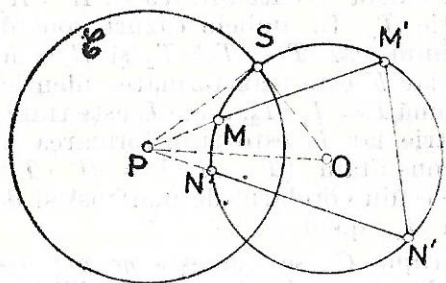


Fig. 30

**Teorema 8.3.** Fie inversiunea  $T = \mathcal{I}(P, r^2)$  și o dreaptă  $d$ . Dacă  $P \in d$ , mulțimea  $d - \{P\}$  este invariantă de  $T$ . Dacă  $P \notin d$  există cercul  $\mathcal{D}(D, DP)$  încât  $T(d) = \mathcal{D} - \{P\}$ ; orice semidreaptă  $[P; X)$  formează unghiuri egale cu  $d$  și cu  $\mathcal{D}$ .

**Demonstrație.** În cazul  $P \in d$  din  $M \in d - \{P\}$  rezultă ușor că  $M' = T(M)$  este pe  $d$ ; folosim și egalitatea evidentă  $T^{-1} = T$ . Pentru cazul  $P \notin d$ , fie  $A$  proiecția lui  $P$  pe  $d$  și  $A' = T(A)$ . Fie  $M \neq A$  situat pe  $d$  și  $M' = T(M)$ . Conform teoremei precedente

$\triangle PAM \sim \triangle PM'A'$ , deci  $\widehat{PM'A'} \equiv \widehat{PAM} = 90^\circ$ , deci  $M'$  se situează pe cercul  $\mathcal{D}$  de diametru  $PA'$ . Pentru  $X \in \mathcal{D} - \{P\}$ , considerăm

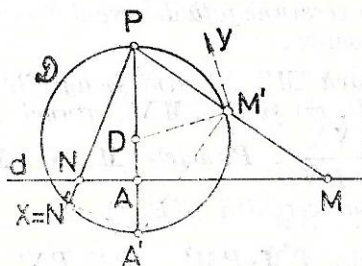


Fig. 31

punctul  $N$  comun dreptelor  $d$  și  $PX$  (evident neparalele). Se demonstrează ușor că punctul  $X$  coincide cu imaginea  $N'$  a lui  $N$  prin  $T$ . Deci  $T(d) = \mathcal{D} - \{P\}$ .

Considerând tangenta  $M'Y$  la  $\mathcal{D}$ , vom constata ușor:  $\widehat{YMP} = 90^\circ - \widehat{PM'D} = 90^\circ - \widehat{M'PA} = \widehat{PMA}$  și ultima afirmație din enunț este demonstrată.

**Observație.** Centrul  $D$  al cercului  $\mathcal{D}$  a apărut drept mijloc al segmentului  $PA'$  (cu  $A' = T(A)$ ), unde  $A \in d$ ,  $PA \perp d$ . Considerând și simetricul  $P_1$  al lui  $P$  față de  $d$  putem dovedi ușor  $D = T(P_1)$ .

**Teorema 8.4.** Fie  $T$  inversiunea față de cercul  $\mathcal{C}(P, r)$  și un cerc  $\mathcal{O}(O, R)$ . Dacă  $P \in \mathcal{O}$ , atunci  $T(\mathcal{O} - \{P\})$  este o dreaptă. Dacă  $P \notin \mathcal{O}$ , atunci  $T(\mathcal{O})$  este un cerc  $\mathcal{O}'(O', R')$ , unde, notând prin  $\mathcal{O}(P)$  puterea punctului  $P$  față de cercul  $\mathcal{O}$ , au loc:  $\overline{PO_1} = \frac{r^2}{\mathcal{O}(P)} \overline{PO}$  și  $R' =$

$\frac{r^2 \cdot R}{|\mathcal{O}(P)|}$ ; o semidreaptă  $(P; X)$  taie cercurile  $\mathcal{O}$  și  $\mathcal{O}'$  sub unghiuri congruente.

**Demonstrație.** Cazul  $P \in \mathcal{O}$  constituie o reformulare a concluziei din teorema precedentă. Vom analiza cazul  $P \notin \mathcal{O}$ . Fie  $A, B$  punctele lui  $\mathcal{O}$  situate pe dreapta  $PO$ . Considerăm imaginile  $A', B'$  ale lui  $A, B$  prin  $T$ . Fie  $M$  nesituat pe  $(AB)$  și  $M' = T(M)$ . Folosind teorema 8.2 vom deduce:  $\triangle PMA \sim \triangle PA'M'$ ,  $\triangle PMB \sim \triangle PB'M'$ . În cazul schițat de figura 32 semidreptele  $(P; A)$  și  $(P; B)$  coincid,

deci vor coincide și  $(P; A')$  cu  $(P; B')$ . Urmează astfel:  $\widehat{B'M'A'} = \widehat{PMA'} - \widehat{PM'B'} = \widehat{PAM} - \widehat{PBM} = \widehat{AMB}$ . Constatăm ușor

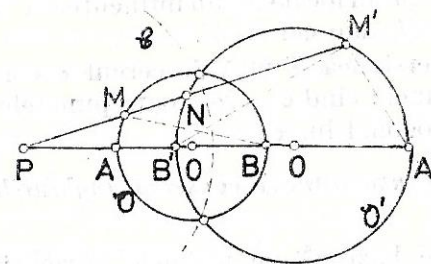


Fig. 32

$M \in \mathcal{O} \Leftrightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B'M'A'} = 90^\circ \Leftrightarrow M' \in \mathcal{O}'$ , unde, evident,  $\mathcal{O}'$  este cercul de diametru  $A'B'$ . Echivalența pusă în evidență rămâne valabilă și când  $M \in (AB)$ . Am demonstrat astfel  $T(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$ . Carac-



terizările din enunț pentru  $\mathcal{O}'$  se obțin în modul următor :

$$PO_1 = \frac{1}{2}(\overline{PA'} + \overline{PB'}) = \frac{1}{2} \cdot r^2(\overline{PA}^{-1} + \overline{PB}^{-1}) =$$

$$= r^2 \left( \frac{\overline{PA} + \overline{PB}}{2} \right) \cdot (\overline{PA} \cdot \overline{PB})^{-1} = \frac{r^2}{\mathcal{O}(P)} \cdot \overline{PO}, \text{ și}$$

$$R' = \frac{1}{2} |\overline{PA'} - \overline{PB'}| = \frac{1}{2} r^2 \cdot |\overline{PA}^{-1} - \overline{PB}^{-1}| =$$

$$= r^2 \left| \frac{\overline{PB} - \overline{PA}}{2} \right| (\overline{PA} \cdot \overline{PB})^{-1} = \frac{r^2}{|\mathcal{O}(P)|} \cdot R.$$

Se consideră acum și omotetia  $H$  de centru  $P$  și de raport egal cu  $\frac{r^2}{\mathcal{O}(P)}$ . Prin această omotetie cercul  $\mathcal{O}$  este dus în cercul  $\mathcal{O}'$ .

Concluzia enunțată este consecință imediată a teoremei 4, § 6. Atragem totuși atenția că prin omotetia  $H$  punctul  $M$  nu este dus în  $M' = T(M)$  ci în celălalt punct  $N$  în care  $PM$  taie  $\mathcal{O}'$ ; dar această schimbare de punct ( $M'$  în loc de  $N$ ) nu influențează valoarea unghiului sub care dreapta  $PM$  taie cercul  $\mathcal{O}'$ .

**Observație.** Inversiunea  $T$  față de cercul  $\mathcal{C}$  conservă un cerc  $\mathcal{O}$  atunci și numai atunci : când  $\mathcal{O} = \mathcal{C}$  (toate punctele lui  $\mathcal{O}$  fiind fixe) sau când  $\mathcal{O}$  este ortogonal lui  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 8.5.** *O inversiune  $T$  conservă unghiurile sub care se taie drepte sau cercuri.*

**Demonstrația** se bazează pe ultimele afirmații, din teoremele 8.3 și 8.4. Dacă  $M$  este comun liniilor  $d$  și  $e$  ( $d$  fiind pe figura 33 o dreaptă iar  $e$  un cerc) și se consideră liniile  $d'$ ,  $e'$  imagini prin  $T$  ale lui  $d$ ,  $e$ , atunci dreapta  $PM$  formează cu  $d'$ ,  $e'$  unghiuri congruente dar „invers” așezate celor formate de  $(PM)$  cu  $d, e$ . Teorema 5 admite o formulare mai generală ce o omitem aici.

În spațiul euclidian  $E_3$  unei sfere  $\mathcal{S}(P, r)$  i se asociază inversiunea  $T$ , transformare bijectivă a mulțimii  $E_3 - \{P\}$  definită prin :

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overline{PM} \cdot \overline{PM'} = r^2$$

(ultima egalitate subînțelegând și coliniaritatea punctelor  $P, M, M'$ ).

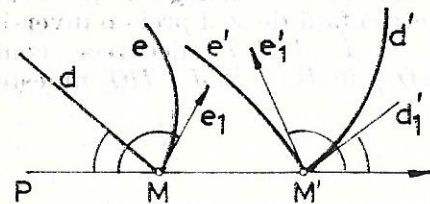


Fig. 33

Prin analogie cu teoremele 8.3—8.5 se demonstrează :

**Teorema 8.6.** *Inversiunea  $T$  față de sfera  $\mathcal{S}(P, r)$  :*

- 1° conservă planele ce conțin polul  $P$ ;
- 2° transformă planele neincidente cu  $P$  în sfere prin  $P$  din care se exclude punctul  $P$  și reciproc;
- 3° transformă sfera  $\Omega(O, R)$  ce nu conține  $P$  într-o sferă  $\Omega'(O_1, R')$  unde  $\overline{PO_1} = \frac{r^2}{\Omega(P)} \cdot \overline{PO}$  și  $R' = \frac{r^2 \cdot R}{|\Omega(P)|}$ ; sferile  $\Omega$  și  $\Omega'$  coincid dacă și numai dacă  $\Omega$  este ortogonală cu  $\mathcal{S}$  sau coincide cu  $\mathcal{S}$ ;
- 4° inversiunea conservă unghiurile sub care se taie plane și sfere.

**Teorema 8.7.** *Fie cercurile (sferele)  $\mathcal{C}(C, r)$ ,  $\mathcal{C}(O, R)$  și  $T, J$  inversiunile față de aceste cercuri (sfere). Fie  $T'$  transformarea definită astfel :*

- dacă  $O \in \mathcal{C}$ ,  $T'$  este simetria față de dreapta (planul)  $J(\mathcal{C} - \{O\})$ ;
  - dacă  $O \notin \mathcal{C}$ ,  $T'$  este inversiunea față de cercul (sfere)  $J(\mathcal{C})$ .
- În aceste condiții transformarea  $J \circ T \circ J$  este o restricție a transformării  $T'$ .*

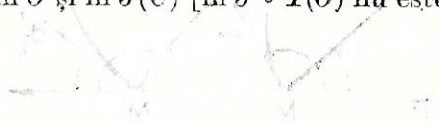
**Demonstrație.** Vom considera mulțimea de puncte  $\mathcal{D} = J(\mathcal{C} - \{O\})$  ce este evident invariata de transformarea  $J \circ T \circ J$ .

Dacă  $O \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  este un plan perpendicular pe dreapta  $OC$ .  $O$  dreaptă  $d$  perpendiculară pe  $\mathcal{D}$  (ce nu conține  $O$ ) trece prin  $J$  într-un cerc ortogonal pe  $\mathcal{C}$  care este invariata de  $T$  și readus de  $J$  în  $d$ .



Deci  $J \circ T \circ J$  conservă dreptele perpendiculare pe  $\mathcal{D}$  (inclusiv pe  $OC$ ). Un cerc (sferă) cu centrul pe  $\mathcal{D}$ , deci ortogonal lui  $\mathcal{D}$ , trece prin  $J$  într-un cerc (o sferă) ortogonal(ă) lui  $\mathcal{C}$ , este apoi conservat(ă) de  $T$  și readus de  $J$  în același cerc (sferă). Prin urmare  $J \circ T \circ J$  conservă cercurile (sferele) ortogonale planului  $\mathcal{D}$ . Deducem că, pentru puncte  $M$  pe care este definită transformarea  $J \circ T \circ J$ ,  $(J \circ T \circ J)(M)$  este simetricul lui  $M$  față de  $\mathcal{D}$  etc.

Cazul  $O \notin \mathcal{C}$  se analizează analog cu specificarea că  $\mathcal{D}$  este cerc (sferă) și rolul simetriei față de  $\mathcal{D}$  îl preia o inversiune. Teorema concluzionează doar  $J \circ T \circ J \subset T'$  deoarece compunerea  $J \circ T \circ J$  nu este definită în  $O$  și în  $J(C)$  [în  $J \circ T(O)$  nu este definită nici  $T'$ ].



## PROGRAMA DE LA ERLANGEN

Spre mijlocul secolului trecut acumulările de rezultate geometrice au permis delimitări de discipline separate cu problematice și metode specifice: geometria proiectivă, geometrii neeuclidiene, geometrie afină, geometrie diferențială. O interpretare unitară a geometriei a fost dată în 1882 de către Felix Klein la Universitatea din Erlangen. Această unificare a prilejuit dezvoltarea cantitativă și calitativă a geometriei și este citată sub denumirea de „Programa de la Erlangen”.

## §1. SPAȚIU KLEIN

**Definiția 1.1.** Se numește *spațiu Klein* concret un cuplu  $(\mathcal{M}, G)$ , unde  $\mathcal{M}$  este o mulțime (ale cărei elemente se numesc *puncte*) iar  $G$  este un grup de transformări ale mulțimii  $\mathcal{M}$  (un element  $T$  din  $G$  este o aplicație bijectivă  $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  numită *mișcare*).

Pe mulțimea  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  a submulțimilor lui  $\mathcal{M}$  se introduce o echivalență  $\varepsilon$  definită prin:

$$F \varepsilon F' \Leftrightarrow \exists T \in G, \bar{T}(F) = F'.$$

Elementele  $F \subset \mathcal{M}$  se numesc *figuri concrete* ale spațiului Klein; clasa de echivalență a unei astfel de figuri,  $[F]$ , constituie o *figură abstractă* sau o *configurație*. Geometria unui spațiu concret  $(\mathcal{M}, G)$  o constituie *studiul proprietăților configurațiilor din  $\mathcal{P}(\mathcal{M})/\varepsilon$* . Altfel spus, geometria lui  $(\mathcal{M}, G)$  este *studiul proprietăților figurilor  $[F]$  ce sînt invariante la transformările grupului  $G$* .

**Observație.** Această modalitate de definire a geometriilor este una dintre cele mai bune dar are și serioase dezavantaje. Unele domenii ale geometriei ca de exemplu geometria algebrică nu se încadrează în această schemă. Pe de altă parte teorii negeometrice se pot încadra ușor în definiția de mai sus: dacă  $\mathcal{M}$  este un grup  $(H, \circ)$  și transformările din  $G$  sînt automorfismele interioare  $T_a: H \rightarrow H$ , unde  $T_a(h) = a \circ h \circ a^{-1}$ , studiul spațiului Klein  $(H, G)$  este studiul *algebric* al grupului  $H$ . Importanța programei de la Erlangen constă însă în



primul rând în faptul că prilejuiește o „ierarhizare” a geometriilor. Vom prezenta această „ierarhizare” în limbajul modern al teoriei categoriilor ca în [43].

Considerăm o categorie  $K$  ale cărei obiecte sînt spații Klein concrete,  $(\mathcal{M}, G)$ . Un morfism de la  $(\mathcal{M}, G)$  la  $(\mathcal{M}', G')$  este un cuplu  $(m, \gamma)$ , unde:  $m$  este aplicație a lui  $\mathcal{M}$  în  $\mathcal{M}'$  iar  $\gamma$  este un omomorfism al grupului  $G$  în  $G'$  încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times G & \xrightarrow{m \times \gamma} & \mathcal{M}' \times G' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{m} & \mathcal{M}' \end{array}$$

să fie comutativă. (Săgețile verticale exprimă acțiunile grupurilor ca transformări  $p: (X, T) \rightsquigarrow T(X)$  etc). Compunerea morfismelor categoriei  $K$  se realizează pe componente:  $(m', \gamma') \circ (m, \gamma) = (m' \circ m, \gamma' \circ \gamma)$ .

Un izomorfism  $f$  al categoriei  $K$  este un cuplu  $f = (b, i)$ , unde  $b$  este o bijecție iar  $i$  un izomorfism de grupuri (ce asigură comutativitatea unei diagrame).

Pe clasa obiectelor lui  $K$  se definește astfel o echivalență  $\sim$ , unde:  $(\mathcal{M}, G) \sim (\mathcal{M}', G')$  dacă există un  $K$ -izomorfism  $f$  între aceste obiecte. Se consideră clasa elementului  $(\mathcal{M}, G)$  în raport cu echivalența  $\sim$ , notată prin  $[\mathcal{M}, G]$  și numită *spațiu Klein abstract*. Geometria a două spații Klein concrete  $(\mathcal{M}, G)$  și  $(\mathcal{M}', G')$  ce se includ în același spațiu Klein abstract este identică deoarece putem „traduce” prin bijecția  $b$  orice proprietate a primului într-o proprietate a celui de al doilea și aceste proprietăți sînt simultan invariante de grupurile  $G$  respectiv  $G'$ .

În particular, pentru orice spațiu Klein concret  $(\mathcal{M}, G)$  și pentru orice bijecție  $b$  a lui  $\mathcal{M}$  în el însuși putem considera un grup  $G'$  „asociat lui  $G'$ ”, unde  $G' = \{b \circ T \circ b^{-1} : T \in G\}$ , compunerea elementelor din  $G'$  fiind compunerea de aplicații. Există desigur și un  $K$ -izomorfism  $f = (b, \tilde{b})$ , unde  $\tilde{b}: G \rightarrow G'$  și  $\tilde{b}(T) = b \circ T \circ b^{-1}$ . Conform acestui exemplu, geometriile kleinienne pe aceeași mulțime  $\mathcal{M}$  nu se modifică dacă înlocuim grupul  $G$  printr-un grup asociat.

Fie  $[K]$  „scheletul” categoriei  $K$ ; obiectele lui  $[K]$  sînt spații Klein abstracte, morfismele lui  $[K]$  se identifică drept  $K$  morfisme între reprezentanți. Obținem o subcategorie  $G$  a lui  $[K]$  reținînd drept morfisme doar  $[K]$ -monomorfismele  $f = (b, i)$ , unde  $b$  este bijecție. Existența unui  $G$ -morfism  $f$  de la  $(\mathcal{M}, G)$  la  $(\mathcal{M}', G')$  permite

să identificăm  $\mathcal{M}$  cu  $\mathcal{M}'$ . Mai rezultă că  $i$  este aplicație injectivă și nu restrîngem generalitatea acceptînd că  $i$  este o incluziune. În aceste condiții se spune că geometria  $[\mathcal{M}, G]$  este *subordonată* geometriei  $[\mathcal{M}', G']$ . Toate propozițiile adevărate în  $[\mathcal{M}', G']$  sînt adevărate și în  $[\mathcal{M}, G]$  dar în general nu și reciproc; o parte dintre noțiunile și relațiile din  $[\mathcal{M}, G]$  nu constituie noțiuni sau relații în  $[\mathcal{M}', G']$  deoarece nu sînt invariante de grupul mai larg  $G'$ . În aceste condiții, categoria  $G$  constituie un tablou unitar al geometriilor, morfismele sale marcînd relații de subordonare între diverse geometrii (kleiniene).

Un procedeu eficient de punere în evidență a unor geometrii  $[\mathcal{M}, H]$  subordonate unei geometrii  $[\mathcal{M}, G]$  constă în alegerea unei submulțimi  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ; transformările  $T$  din  $G$  vor fi reținute în  $H$  dacă și numai dacă satisfac  $\hat{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ . În aceste condiții  $\mathcal{A}$  este numit *absolutul* geometriei  $(\mathcal{M}, H)$ .

În paragrafele ce urmează vom prezenta cîteva geometrii kleinienne punînd în evidență relațiile lor de subordonare. Ne propunem să ilustrăm pe exemple metodele de studiu al acestor geometrii pentru a surprinde treptat gradul de generalitate al acestor metode.

## § 2. GEOMETRIE AFINĂ PLANĂ

Vom lua pentru  $\mathcal{M}$  mulțimea  $\mathbf{R}^2$ . Numim *transformare afină* a lui  $\mathbf{R}^2$  o aplicație  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  ce asociază elementului  $(x, y)$  din  $\mathbf{R}^2$  elementul  $(x', y')$ , unde:

$$(2.1) \quad x' = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{10} \text{ și } y' = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{20},$$

$a_{ij}$  fiind numere reale precizate astfel încît matricea

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

să fie ȳesingulară.

Fie  $\mathcal{A}_2$  mulțimea transformărilor afine ale lui  $\mathbf{R}^2$ .

**Teorema 2.1.** *Mulțimea  $\mathcal{A}_2$  formează grup în raport cu operația de compunere.*

*Demonstrația* este simplă; pentru a constata că prin compunerea transformărilor afine  $T$  și  $S$  se obține o transformare afină  $S \circ T$  vom observa  $M_{S \circ T} = M_S \cdot M_T$  și va urma  $\det M_{S \circ T} = (\det M_S) \cdot (\det M_T) \neq 0$ . Transformarea identică  $I$  se obține particularizînd  $a_{11} = a_{22} = 1$  și  $a_{12} = a_{21} = a_{10} = a_{20} = 0$ . Condiția  $\det M_T \neq 0$  permite să rezolvăm sistemul de ecuații (1.1) în raport cu  $(x, y)$  și să punem în evidență inversa  $T^{-1}$  a transformării  $T$ , matricea corespunzătoare ei fiind

$$M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}.$$



În consecință, vom considera *geometria afină plană* drept *studiu al cuplului*  $(\mathbf{R}^2, \mathcal{A}^2)$ .

Numim *punct* un element din  $\mathbf{R}^2$ . Pentru un punct  $(x_i, y_i)$  vom folosi, atunci când nu vor fi posibile confuzii, și notația  $A_i$ .

Fiind date două puncte distincte  $A_1, A_2$  nu va exista nici un invariant afin asociat lor; ne convingem de aceasta constatînd că pentru orice alte două puncte distincte  $B_1, B_2$  putem determina o transformare afină  $T$  încît  $T(A_1) = B_1, T(A_2) = B_2$ .

Să considerăm acum trei puncte distincte  $A_1, A_2, A_3$ . Dacă încercăm să determinăm o transformare afină  $T$  care să le aplice respectiv în punctele  $B_1, B_2, B_3$  sîntem constrînși să luăm în considerație determinantul:

$$(2.2) \quad S(A_1, A_2, A_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vom determina o „transformare” unică  $T$  dacă  $S(A_1, A_2, A_3) \neq 0$  și matricea ei va fi nesingulară dacă și numai dacă  $S(B_1, B_2, B_3) \neq 0$ , deoarece este îndeplinită egalitatea:

$$(2.3) \quad S(B_1, B_2, B_3) = \det(M_T) \cdot S(A_1, A_2, A_3).$$

Reținem de aici că  $S(A_1, A_2, A_3)$  nu constituie un invariant afin dar condiția  $S(A_1, A_2, A_3) = 0$  are caracter geometric și reprezintă condiția „de coliniaritate” a punctelor  $A_1, A_2, A_3$ . Atenționăm că denumirea de „coliniaritate” este în principiu arbitrară dar ea reflectă o proprietate intuitivă ce se manifestă cînd reprezentăm în modul uzual cuplurile  $(x, y)$  prin puncte ale planului. Vom introduce acum conceptul de *dreaptă* definită ca submulțime  $d$  a lui  $\mathbf{R}^2$  ce satisface proprietatea că oricare ar fi punctele  $A_1, A_2, A_3$  din  $d$  să aibă loc  $S(A_1, A_2, A_3) = 0$ . Fie  $\mathcal{L}$  familia dreptelor din  $\mathbf{R}^2$ , concepută drept o subfamilie în  $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$ . Urmează imediat:

**Teorema 2.2.** Pentru mulțimea de puncte  $\mathbf{R}^2$  și pentru mulțimea  $\mathcal{L}$  a dreptelor, dacă interpretăm incidența prin apartenență, sînt satisfăcute axiomele de incidență ale geometriei plane  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$ .

Vom constata acum că, în ipoteza  $A_1 \neq A_2$ , condiția  $S(A_1, A_2, A_3) = 0$  revine la existența unui număr real  $t$  încît

$$(2.4) \quad x_3 = t \cdot x_1 + (1 - t) \cdot x_2, \quad y_3 = t \cdot y_1 + (1 - t) \cdot y_2.$$

Încă nu știm dacă parametrul real  $t$  are semnificație geometrică deoarece nu știm *a priori* ce devin formulele (2.4) după ce prin aplicarea transformării affine generice (2.1) înlocuim punctele  $A_i$  prin

$A'_i = T(A_i)$  pentru  $i = 1, 2, 3$ . Fie  $A'_i(x'_i, y'_i)$ . Se constată însă ușor că vor avea loc egalitățile

$$(2.4') \quad x'_3 = t \cdot x'_1 + (1 - t) \cdot x'_2; \quad y'_3 = t \cdot y'_1 + (1 - t) \cdot y'_2.$$

După stabilirea acestor egalități constatăm că transformarea afină  $T$  nu schimbă parametrul real  $t$ , deci acest parametru este un invariant al grupului afin  $\mathcal{A}_2$ . Din nou, denumirea acestui invariant este arbitrară, dar intuiția geometrică recomandă să-l numim *raport simplu* (a trei puncte coliniare) și să notăm  $t = (A_3, A_1; A_2)$ . (Este ușor de văzut pe un desen tradițional că, dacă am avea dreptul să măsurăm lungimi, am găsi  $t = d(A_2, A_3) : d(A_2, A_1)$  și se justifică astfel denumirea de „raport”). Un calcul simplu conduce la:

$$(2.5) \quad S(A_1, A_2, A_3) = 0 \wedge A_1 \neq A_2 \Rightarrow (A_3, A_1; A_2) = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2}.$$

Este posibil să dezvoltăm geometria afină în direcția preconizată de sistemul axiomatic al lui Hilbert introducînd relația ternară „a fi între” prin:

$$(2.6) \quad A_1 - A_2 - A_3 \Leftrightarrow [A_1 \neq A_2 \wedge S(A_1, A_2, A_3) = 0 \wedge \wedge (A_3, A_1; A_2) < 0].$$

**Teorema 2.3.** În cadrul geometriei afine  $(\mathbf{R}^2, \mathcal{L}, ? - ? - ?)$  sînt îndeplinite axiomele  $\mathbf{II}_1, \mathbf{II}_2, \mathbf{II}_3$  din sistemul lui Hilbert.

*Demonstrația* este simplă. Pentru verificarea axiomei  $\mathbf{II}_3$  este util să se justifice formulele:

$$(2.7) \quad \begin{cases} (A_3, A_1; A_2) + (A_3, A_2; A_1) = 1 \\ (A_3, A_1; A_2) \cdot (A_1, A_3; A_2) = 1. \end{cases} \quad \text{și}$$

*Observație.* Pentru puncte distincte  $A_1, A_2$  condiția  $A \in [A_1 A_2]$  ce revine la  $A_1 - A - A_2$  se exprimă prin:

$$(A, A_1; A_2) \in (0, 1).$$

Vom constata ulterior că este îndeplinită și axioma lui Pasch. Să observăm însă că pentru ca punctul  $A(x, y)$  să aparțină dreptei  $A_1 A_2$  este necesar să aibă loc conform (2.2):

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \quad \text{unde } a = y_1 - y_2, \quad b = x_2 - x_1, \\ c = x_1 y_2 - y_1 x_2 \text{ și } a^2 + b^2 \neq 0.$$



Egalitatea  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$  reprezintă ecuația dreptei  $A_1 A_2$ . Înlocuind unul sau ambele puncte  $A_i$  prin alte puncte ale dreptei, coeficienții  $a, b, c$  se amplifică prin același factor nenul. Condiția  $a^2 + b^2 \neq 0$  este esențială; ea exprimă  $A_1 \neq A_2$ . O anumită dreaptă  $d$  este dată deci de un triplet  $(a, b, c)$  de numere reale, determinate pînă la un factor de proporționalitate cu condiția ca numerele  $a$  și  $b$  să nu fie simultan nule.

**Teorema 2.4.** Fiind dată o dreaptă  $d$  de ecuație  $ax + by + c = 0$  fiecare dintre inegalitățile  $ax + by + c > 0$  și  $ax + by + c < 0$  definește câte un semiplan delimitat de dreapta  $d$ .

*Demonstrație.* Fie  $M(m, n)$  și  $P(p, q)$  puncte nesituate pe  $d$ . Un punct arbitrar  $Z(u, v)$  al dreptei  $(MP)$  este dat de o valoare arbitrară a parametrului  $t$  prin  $u = tm + (1 - t)p, v = tn + (1 - t)q$ .

Acest punct  $Z$  este pe  $d$  dacă și numai dacă  $\frac{t}{t-1} = \frac{ap + bq + c}{am + bn + c}$ .

Cu ajutorul formulelor (2.7) se observă că are loc  $\frac{t}{t-1} = 1 : (1 - t) = (P, M; Z)$  și prin urmare va exista  $Z$  pe  $d$  încît  $P-Z-M$  dacă și numai dacă numerele reale  $ap + bq + c$  și  $am + bn + c$  au semne contrare. Deci, condiția ca  $P, Q$  să fie în același semiplan, coincide cu definiția echivalenței  $\sim$  formulată în cap. V, § 3, q.e.d.

**Teorema 2.5.** În cadrul geometriei afine plane are loc axioma  $\Pi_4$  a lui Pasch.

*Demonstrație.* Prin teorema precedentă am constatat că are loc axioma  $B_7$  (de separare a planului) din sistemul lui Birkhoff și am demonstrat în teorema 2.7 din capitolul VI echivalența dintre  $B_7$  și  $\Pi_4$ .

Condiția ca dreptele de ecuații  $ax + by + c = 0$  și  $a'x + b'y + c' = 0$  să fie paralele este cunoscută:  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ .

Se verifică imediat valabilitatea axiomei V a lui Hilbert.

*Observații.* Conținutul acestui paragraf reproduce în bună măsură ideile din construcția modelului analitic  $\mathcal{G}$  (capitolul V, § 7). Pentru variație și expeditivitate s-a studiat aici planul afin dar nu apar dificultăți conceptuale pentru a extinde acest studiu la spații afine  $n$ -dimensionale. Pentru simplitate, construcția a pornit de la cîmpul  $\mathbb{R}$  al numerelor reale dar poate fi reluată fără modificări esențiale pentru orice cîmp ordonat  $K$ . Cu aceste extensii se realizează ușor primii pași în studiul geometriei afine  $n$ -dimensionale.

nule peste un cîmp  $K$ , adică studiul geometriei kleiniane  $(K^n, \mathcal{A}_n)$ , unde  $\mathcal{A}_n$  conține transformările  $T: K^n \rightarrow K^n$  ce aplică punctul  $A(x^i)$  în  $A(\bar{x}^i)$ , unde există  $a_j^i \in K$  (pentru

$i = 1, 2, \dots, n$  și  $j = 0, 1, \dots, n$ ) încît  $\bar{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + a_0^i, i = 1, 2, \dots, n$  și care au matricea  $M_T = (a_j^i)$ , (cu  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), nesingulară.

Sperăm ca expunerea din acest paragraf să fi sugerat corect modalitatea efectivă de obținere a noțiunilor specifice prin analiza acțiunii grupului ales asupra celor mai simple figuri. Vom mai prezenta acum modul de obținere a unor geometrii subordonate geometriei afine plane reale.

Prin formula (2.3) am dedus legea de transformare a mărimii  $S(A_1, A_2, A_3)$ . Dacă reținem doar transformările  $T$  din  $\mathcal{A}_n$  pentru care se realizează condiția:

$$(2.8) \quad \det M_T \in \{-1, +1\}$$

obținem evident un subgrup  $\mathcal{E}_2$  al lui  $\mathcal{A}_2$ . În geometria kleiniană  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_2)$  vom avea și un invariant asociat unui triplet arbitrar de puncte  $(A_1, A_2, A_3)$  numit „aria triunghiului” și dat de

$$(2.9) \quad |A_1 A_2 A_3| = \frac{1}{2} \cdot |S(A_1, A_2, A_3)|.$$

(Denumirea ignoră posibilitatea degenerării „triunghiului”  $A_1 A_2 A_3$ ). Pentru geometria kleiniană  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_2)$  se folosește denumirea de geometrie *echiafină* (plană, reală). Geometria echiafină este evident subordonată celei afine. O geometrie încă mai specializată  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_2^+)$  se obține înlocuind condiția (2.8) prin:

$$(2.8') \quad \det M_T = 1.$$

De această dată și semnul mărimii  $S(A_1, A_2, A_3)$  este invariant și avem posibilitatea de a decide dacă un triunghi  $A_1 A_2 A_3$  este orientat pozitiv sau negativ.

Să considerăm punctul  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  individualizat și să reținem doar transformările  $T$  din  $\mathcal{A}_2$  ce conservă acest punct; în formulele (2.1) se impune deci să luăm  $a_{10} = a_{20} = 0$ . Conform teoriei generale din § 1 am ales acum un absolut  $\mathcal{A} = \{(0, 0)\}$  și ca urmare obținem ceea ce se numește geometria *centroafină* (plană, reală)  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{C}_2)$  evident subordonată celei afine.

Alegînd drept absolut  $\mathcal{A}$  în  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_2)$  mulțimea punctelor dreptei  $d$  ce are ecuația  $x = 0$  particularizăm în (2.1)  $a_{12} = a_{10} = 0$  și oferim condiției  $\det M_T \neq 0$  forma mai simplă  $a_{11} \neq 0 \neq a_{22}$ . Obținem pe această cale geometria *axială* (plană, reală) subordonată celei afine.



Desigur, pentru geometriile centroafină și axială se pot pune în evidență invarianți specifici de care însă nu ne preocupăm aici.

*Observație.* Studiul diferențial al unor figuri importante din geometria centroafină, cum ar fi curbele și suprafețele din  $(\mathbf{R}^3, \mathcal{C}_3)$  a fost inițiat și de Gh. Titeica și dezvoltată în cele mai mici amănunte de Al. Myller și O. Mayer. În literatura de specialitate se afirmă astăzi că geometria diferențială centroafină este o creație pur românească.

### § 3. PLANUL PROIECTIV REAL

Fie  $\mathcal{N}$  mulțimea  $\mathbf{R}^3$  din care se exclude punctul  $(0, 0, 0)$ . Pe  $\mathcal{N}$  se consideră relația binară  $\gamma$  definită prin:

$$(a, b, c) \gamma (a', b', c') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{R}^*, a' = ka, b' = kb, c' = kc.$$

Se constată ușor că  $\gamma$  este o echivalență pe  $\mathcal{N}$ ; mulțimea cit  $\mathcal{N}/\gamma$  va fi notată cu  $\mathbf{P}_2$  iar clasa de echivalență a elementului  $(a, b, c)$  prin  $[a, b, c]$ . Ne vom referi la operația de realgere a unui reprezentat pentru  $[a, b, c]$  cu termenul de „normare”.

Inițiem construcția unui spațiu Klein  $(\mathcal{M}, G)$  luând  $\mathcal{M} = \mathbf{P}_2$ . Deoarece elementele lui  $\mathbf{P}_2$  sînt considerate *puncte* convenim asupra unui anumit mecanism de notare: punctul  $A$  va fi dat de  $[a^1, a^2, a^3]$ , punctul  $B$  de  $[b^1, b^2, b^3]$  etc. Dacă majuscula ce desemnează punctul va fi indexată (inferior) vom folosi același indice și pentru componentele ternei ce reprezintă acel punct; de exemplu  $M_i$  va fi dat de  $[m_i^1, m_i^2, m_i^3]$ .

Unei matrici de ordinul 3 nesară

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

ii asociem o transformare proiectivă  $T: \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  definită prin  $Y = T(X)$ , unde

$$(3.1) \quad y^j = \sum_{i=1}^3 t_{ij}^j x^i, \quad j = 1, 2, 3.$$

Atragem atenția că folosim aceeași literă pentru transformare și pentru matrice; vom avea grijă ca orice eventualitate de confuzie să fie eliminată de context. Este evident că amplificînd o matrice  $T$  nesară de ordinul 3 printr-un factor real nenul  $k$  nu afectăm transformarea proiectivă  $T$  asociată ei ci doar normarea reprezentantului  $(y^1, y^2, y^3)$  al lui  $Y$ .

Mulțimea transformărilor proiective  $T$  alcătuiește evident un grup (în raport cu operația de compunere); vom nota cu  $G$  acest grup.

Grupul  $G$  acționează tranzitiv pe mulțimea  $\mathbf{P}_2$  și pe familia submulțimilor lui  $\mathbf{P}_2$  alcătuite din cîte exact două puncte. Prin urmare nu vom putea asocia noțiuni sau mărimi invariante la figuri cu cel mult două puncte.

Cercetăm problema determinării unei transformări  $T$  care să aplice puncte  $A, B, C$  date, în puncte  $A_1, B_1, C_1$  prescise; ca și în paragraful precedent apare necesitatea considerării mărimii

$$\mathcal{S}(A, B, C) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Amplificînd cu un factor real nenul  $k$  reprezentantul  $(a^1, a^2, a^3)$  al punctului  $A$ , amplificăm cu același factor mărimea  $\mathcal{S}(A, B, C)$  deci  $\mathcal{S}$  nu constituie nici măcar o aplicație de la  $(\mathbf{P}_2)^3$  în  $\mathbf{R}$  așa cum ar da de bănuț notația. Cu toate acestea, condiția  $\mathcal{S}(A, B, C) = 0$  este independentă de reprezentanți și este și invariabilă de transformările proiective deci are caracter geometric. În locul notației relativ confuze  $\mathcal{S}(A, B, C) = 0$  vom prefera formularea: „ $A, B, C$  sînt puncte coliniare”. Cu ajutorul acestei relații de coliniaritate se introduce noțiunea de dreaptă: dreapta  $(AB)$  determinată de punctele distincte  $A$  și  $B$  din  $\mathbf{P}_2$  este mulțimea punctelor  $C$  din  $\mathbf{P}_2$  coliniare cu  $A, B$ .

**Teorema 3.1.** În geometria proiectivă plană sînt îndeplinite următoarele „axiome de incidență”:

$\mathbf{P}_0$ : Pentru orice două puncte distincte  $A, B$  există exact o dreaptă  $(AB)$  care le conține.

$\mathbf{P}_1$ : Pentru orice două drepte distincte  $a, b$  există exact un punct  $a \cap b$  ce le aparține.

$\mathbf{P}_2$ : Există trei puncte necoliniare.

*Demonstrație.* Exprîmînd condiția  $\mathcal{S}(A, B, X) = 0$  vom constata că o dreaptă  $d$  din  $(\mathbf{P}_2, G)$  este dată de un element  $\tilde{d} = [D_1, D_2, D_3]$  din  $\mathbf{P}_2$  încît punctul  $X$  aparține acestei drepte dacă și numai dacă are loc:

$$(3.2) \quad D_1 x^1 + D_2 x^2 + D_3 x^3 = 0.$$

Atragem atenția asupra mecanismului de notare: o literă mică a alfabetului latin marchează dreapta și aceeași literă mare este



folosită pentru componentele ternei reprezentative. Pentru înlăturarea posibilității confuzii, indicii de numerotare din ternă sînt așezați acum jos. Să mai observăm că dreapta  $d$  nu se identifică prin elementul  $\tilde{d}$ . Imaginile prin  $T$  ale punctelor drepte  $d$  alcătuiesc o dreaptă  $c$  și pentru terna asociată  $\tilde{c} = (C_1, C_2, C_3)$  are loc egalitatea :

$$(3.1') \quad D_i = \sum_{j=1}^3 t_j^i C_j \text{ pentru } i = 1, 2, 3,$$

ce demonstrează că în general nu are loc  $T(\tilde{d}) = \tilde{c}$ , egalitate ce ar justifica identificarea  $\tilde{d} = \tilde{c}$ .

Pentru a verifica  $P_0$  vom considera :

$$(3.3) \quad D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a^3 & a^1 \\ b^3 & b^1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Înainte de a verifica  $P_1$  se impune să observăm că semnul  $\frown$  utilizat în enunț nu coincide cu semnul  $\cap$  al intersecției deoarece prin intersectarea a două mulțimi de puncte se obține o mulțime, eventual alcătuită dintr-un punct. Se afirmă deci că ar avea loc  $a \cap b = \{a \frown b\}$ . Vom citi însă aici și semnul  $\frown$  tot prin „intersectat cu” referindu-ne însă la operația geometrică de intersecție și nu la cea din teoria mulțimilor. Verificăm  $P_1$  arătînd că pentru  $a = b$ , matricea  $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$  are rangul doi și prin urmare sistemul liniar și omogen :

$$A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 = 0, \quad B_1x^1 + B_2x^2 + B_3x^3 = 0$$

are o soluție unică pînă la un factor de proporționalitate, adică un singur punct  $C \in P_2$ , unde

$$(3.3') \quad c_1 = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}.$$

În fine, trei puncte evident necoliniare sînt :  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$  și  $[0, 0, 1]$ .

Sperăm că modul de redactare a demonstrației teoremei a sugerat existența în geometria proiectivă plană a unei „dualități”

între puncte și drepte. Această impresie va fi transformată în certitudine în cele ce urmează imediat.

Reconsiderăm operația ce asociază la două puncte distincte  $A, B$  dreapta  $(AB)$  și, pentru a scoate în evidență că este o operație, vom renota aici  $(AB)$  prin  $A \frown B$ . Vom citi semnul  $\frown$  prin „unit cu” și ne vom referi la operația respectivă cu termenul de *uniune*. Semnul  $\frown$  este asemănător cu cel al reuniunii,  $\cup$ , dar beneficiază de numiri distincte și operațiile subînțelese au rezultate clar diferențiate.

**Definiția 3.1.** Fie  $P$  o propoziție referitoare la puncte și drepte din geometria proiectivă plană și la operațiile  $\frown$ ,  $\cap$  de uniune și intersecție. Numim *duala propoziției*  $P$  propoziția  $P'$  ce se obține din  $P$  substituind între ele cuvintele punct-dreaptă și operațiile  $\frown, \cap$ .

**Teorema 3.2.** (Principiul de dualitate). În cadrul geometriei proiective plane, oricare ar fi propoziția corect construită  $P$ , dacă  $P'$  este propoziția duală lui  $P$ , atunci propozițiile  $P$  și  $P'$  sînt simultan adevărate.

**Demonstrație.** Fie  $\tilde{P}_2$  mulțimea asociată lui  $P_2$ ; avem astfel două mulțimi disjuncte între care există o corespondență biunivocă  $f: P_2 \rightarrow \tilde{P}_2$ . Elementele lui  $P_2$  le vom numi în continuare puncte iar cele din  $\tilde{P}_2$  le vom numi drepte. Pe mulțimea  $P_2$  este dat un grup  $G$  de transformări așa că putem dota  $\tilde{P}_2$  cu grupul asociat  $\tilde{G}$  alcătuit din transformările  $\tilde{T} = f \circ T \circ f^{-1}$ . Vom considera aplicația  $F: G \rightarrow \tilde{G}$ , unde  $F(T)$  are drept matrice, matricea adjunctă a lui  $T$ . Se constată ușor că  $F$  constituie un izomorfism de grupuri de transformări. Cuplul  $(f, F)$  constituie un morfism în categoria spațiilor Klein concrete de la  $(P_2, G)$  la  $(\tilde{P}_2, \tilde{G})$  ce este un izomorfism. Prin acest morfism propoziției  $P$  din primul model îi corespunde propoziția  $P'$  din cel de-al doilea alcătuită conform definiției 3.1. Deci  $P$  și duala ei  $P'$ , sînt simultan adevărate.

**Observație.** Și geometria proiectivă plană poate fi construită axiomatic. Propozițiile  $P_0, P_1, P_2$  constituie primele ei axiome. Pentru o astfel de construcție axiomatică teorema 3.2 beneficiază de o demonstrație de un alt tip și anume : se demonstrează că dualele  $P'_i$  ale axiomelor  $P_i$  sînt propoziții adevărate și apoi, că axiomele  $P_i$  sînt consecințe ale sistemului dual de axiome  $P'_i$ . Aici, în mod curent se observă că  $P_0$  și  $P_1$  sînt duale una alteia și apoi că  $P_2$  este echivalentă cu propoziția  $P'_3$ : *Există trei drepte nesecante*. Pe măsura enunțării de noi axiome se urmărește această proprietate de echivalență. Desigur, dacă în afara noțiunilor primare (punct, dreaptă, aparține) apar noi noțiuni, primare sau derivate, se impune extinderea definiției 3.1 pentru a „traduce” și noile noțiuni în mod direct.



Revenim acum la condiția  $\mathcal{S}(A, B, C) = 0$  și constatăm că, în ipoteza  $A \neq B \neq C$ , este echivalentă cu existența unui număr real  $r$  încît matricea

$$\begin{pmatrix} a^1 - rb^1 & a^2 - rb^2 & a^3 - rb^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

să aibă rangul 1. Dacă fixăm factorul de proporționalitate pentru fiecare din ternele  $(a^n)$ ,  $(b^n)$ , atunci numărul real  $r$  este unic determinat și are loc:

$$r = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a^3 & a^1 \\ c^3 & c^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^3 & b^1 \\ c^3 & c^1 \end{vmatrix}}$$

Înlocuind punctul  $C$  prin alt punct  $D \neq B$ , vom înlocui numărul real  $r$  prin altul  $s$ . Este ușor de constatat că numărul real

$$\frac{r}{s} = \frac{\begin{vmatrix} a^i & a^j \\ c^i & c^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^i & b^j \\ c^i & c^j \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a^i & a^j \\ d^i & d^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b^i & b^j \\ d^i & d^j \end{vmatrix}}$$

nu mai depinde nici de normarea aleasă pentru ternele  $(a^n)$ ,  $(b^n)$  și nici de perechea de indici  $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ . Vom folosi pentru  $\frac{r}{s}$  notația  $(A, B; C, D)$  și denumirea de biraport al punctelor coliniare (distincte)  $A, B, C, D$  luate în această ordine. Un calcul algebric nu tocmai lesnicios asigură:

**Teorema 3.3.** *Dacă  $(A, B, C)$  și  $(A_1, B_1, C_1)$  sînt terne de puncte coliniare distincte, atunci: 1° Există o infinitate de transformări proiective  $T$  ce fac să se corespundă aceste terne. 2° Restricția la dreapta  $A \cup B$  a tuturor acestor transformări este o aplicație bijectivă  $t$  ce are drept codomeniu dreapta  $A_1 \cup B_1$  și, pentru un punct arbitrar  $D$  situat pe  $A \cup B - \{A, B, C\}$ , are loc  $t(D) = D_1$  dacă și numai dacă  $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$ .*

Deducem din această teoremă:

— grupul proiectiv acționează tranzitiv asupra tripletelor de puncte coliniare, deci nu există invarianti pentru trei puncte coliniare;

— biraportul a patru puncte coliniare este invariant.

Se introduce în mod natural și biraportul a patru drepte concurente  $(a, b; c, d) = (\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{c}, \tilde{d})$  (aici, în membrul secund apar patru puncte coliniare). Cele două noțiuni de biraport sînt conexe prin:

**Teorema 3.4.** *În geometria proiectivă plană are loc proprietatea:*

**P<sub>3</sub>:** *Dacă  $A, B, C, D$  sînt puncte coliniare distincte cîte două și  $O$  este un punct nesituat pe dreapta  $A \cup B$ , atunci, pentru dreptele  $a = O \cup A, b = O \cup B, c = O \cup C, d = O \cup D$  are loc:  $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$ .*

Evităm și calculele algebrice necesare verificării acestei teoreme. Atragem doar atenția asupra faptului că propoziția **P<sub>3</sub>** se adoptă în mod obișnuit ca axiomă pentru edificarea geometriei proiective plane ca teorie axiomatică. Este interesant că duala propoziției **P<sub>3</sub>** este doar o reformulare a ei. Spunem atunci că: **P<sub>3</sub>** este propoziție autoduală.

Vom menționa în continuare două geometrii kleinienne subordonate geometriei proiective.

Să luăm drept absolut  $\mathcal{A}$  dreapta de ecuație  $x^3 = 0$ . Transformarea proiectivă  $T$  dată de (3.1) va conserva acest absolut dacă și numai dacă  $t_{31} = t_{32} = 0$ . Condiția ca matricea  $T$  să fie nesarăzătoare impune  $t_{33} \neq 0$ ; avînd în vedere că ne este permisă amplificarea întregii matrici cu un factor real nenul putem presupune, fără a restringe generalitatea, că are loc  $t_{33} = 1$ . Explicităm acum transformarea  $T$  spunînd că are loc  $T(X) = Y$  dacă

$$(3.4) \quad y^1 = t_1^1 x^1 + t_2^1 x^2 + t_3^1 x^3; \quad y^2 = t_1^2 x^1 + t_2^2 x^2 + t_3^2 x^3; \quad y^3 = x^3 \text{ și}$$

$$(3.5) \quad \begin{vmatrix} t_1^1 & t_2^1 \\ t_1^2 & t_2^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(În aceste condiții reprezentantul  $(y^1, y^2, y^3)$  al lui  $Y$  este normat în funcție de reprezentantul ales pentru  $X$ ).

Să notăm prin  $\mathcal{A}$  subgrupul lui  $G$  alcătuit doar din transformările proiective  $T$  ce conservă absolutul  $\mathcal{A}$ . Vom renota provizoriu **P<sub>2</sub>** —  $\mathcal{A}$  prin  $\mathcal{M}$  și vom analiza geometria kleiniană  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ . (Subînțelegem aici că am observat că orice transformare proiectivă  $T$  ce conservă  $\mathcal{A}$  are o restricție ce este bijecție a lui  $\mathcal{M}$  și identificăm această restricție cu transformarea inițială.) Pentru punctul generic  $\mathcal{M} = [m^1, m^2, m^3]$  din  $\mathcal{M}$  putem alege în mod unic un reprezentant  $(m^1, m^2, 1)$ . Realizăm pe această cale o bijecție  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , unde  $f(\mathcal{M}) = (m^1, m^2)$ . Pe baza acestei bijecții identificăm  $\mathcal{M}$  prin  $\mathbb{R}^2$  și reajustăm mecanis-



mul de notare prin:  $X = (x^1, x^2)$ ,  $Y = (y^1, y^2)$  etc. Astfel (3.4) devine:

$$(3.4') \quad y^1 = t_1^1 x^1 + t_2^1 x^2 + t_3^1; \quad y^2 = t_1^2 x^1 + t_2^2 x^2 + t_3^2,$$

condiția (3.5) conservându-se. Se constată acum ușor că geometria astfel obținută este geometria afină (plană, reală) studiată în paragraful precedent).

O altă geometrie kleiniană subordonată lui  $(\mathbf{P}_2, G)$  se obține alegând drept absolut  $\mathcal{A}$  „conica ovală” de ecuație  $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ . Deoarece pe această conică nu pot exista puncte cu  $x^3 = 0$  putem să ne-o imaginăm drept cerc de ecuație  $(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0$ . Transformarea proiectivă  $T$  dată de (3.1) va conserva acest absolut dacă și numai dacă există un număr real  $\rho$  încît:

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & -t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & -t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & -t_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vom nota cu  $H'$  subgrupul lui  $G$  alcătuit din transformările proiective  $T$  ce satisfac condiția (3.6).

Considerăm și mulțimea  $C$  a punctelor „interioare” lui  $\mathcal{A}$ . Aceste puncte  $X = [x^1, x^2, x^3]$  pot fi caracterizate *algebric* prin condiția  $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 < 0$  sau *geometric* prin condiția că *orice* dreaptă  $d$  prin  $X$  să aibă în comun cu  $\mathcal{A}$  exact două puncte.

Condiția geometrică revine la: Oricare ar fi  $(d_1, d_2, d_3) \neq (0, 0, 0)$  încît  $d_1 x^1 + d_2 x^2 + d_3 x^3 = 0$  sistemul

$$d_1 u^1 + d_2 u^2 + d_3 u^3 = 0, \quad (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 0$$

să admită două soluții reale neproporționale. Eliminînd necunoscuta  $u^3$  exprimăm această condiție prin: trinomul de gradul doi

$$[(d_3)^2 - (d_1)^2](u^1)^2 - 2d_1 d_2 u^1 \cdot u^2 + [(d_3)^2 - (d_2)^2](u^2)^2 = 0$$

să aibă soluții reale distincte. Prin calculul discriminantului condiția revine la

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 - (d_3)^2 > 0.$$

Am rezumat deci condiția geometrică la:

$$(d_1, d_2, d_3) \neq (0, 0, 0) \text{ și } d_1 x^1 + d_2 x^2 + d_3 x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d_1)^2 + (d_2)^2 - (d_3)^2 > 0.$$

Amplificînd inegalitatea prin  $(x^3)^2$  și înlocuind  $d_3 x^3$  din egalitate deducem că pentru orice  $d_1, d_2$  reali să aibă loc:

$$[(x^3)^2 - (x^1)^2](d_1)^2 - 2x^1 x^2 d_1 d_2 + [(x^3)^2 - (x^2)^2](d_2)^2 > 0.$$

Un nou calcul de discriminant de trinom oferă în fine condiției analizate forma algebrică preconizată.

**Teorema 3.5.** *O transformare proiectivă  $T$  din  $H'$  conservă calitatea unui punct  $X$  din  $\mathbf{P}_2$  de a fi interior lui  $\mathcal{A}$ , adică  $T(C) \subset C$ .*

**Demonstrație.** Fie  $T(X) = Y$ . Orice dreaptă  $d$  prin  $Y$  este imaginea prin  $T$  a unei drepte  $c$  prin  $X$ . Dacă  $X$  este în  $C$  dreapta  $c$  va intersecta absolutul  $\mathcal{A}$  în exact două puncte  $L_1, L_2$ . Imaginile prin  $T$  ale acestor puncte constituie intersecția lui  $d$  cu absolutul deci orice dreaptă  $d$  prin  $Y$  intersectează  $\mathcal{A}$  în două puncte distincte, q.e.d.

**Corolar.** *Orice transformare  $T'$  din  $H'$  admite o restricție  $T$  la  $C$  fiind o bijecție a lui  $C$  în el însuși. Restricțiunile tuturor transformărilor  $T'$  din  $H'$  alcătuiesc un grup  $\tilde{H}$ .*

Sintem acum în posesia unei geometrii kleinienne  $(C, \tilde{H})$  subordonată geometriei proiective. Matematicianul englez Arthur Cayley a descoperit această geometrie și a demonstrat că *această geometrie constituie un model al geometriei hiperbolice plane*. Noi vom demonstra aceasta în finalul paragrafului 5.

Vom încheia acest paragraf cu un comentariu. Expunerea din acest paragraf și din precedentul este corectă dar foarte puțin „geometrică”. Situația este frecventă deoarece pentru majoritatea geometriilor kleinienne  $(\mathcal{M}, G)$  este valabil un *mecanism standard* de precizare a figurilor și invariantilor. Căutînd transformări  $T$  din  $G$  care să aplice o figură  $F \subset \mathcal{M}$  pe o altă figură  $F' \subset \mathcal{M}$ , extinzînd treptat figura  $F$  (și corespunzător,  $F'$ ) se determină pas cu pas parametrul transformării  $T$ . La un moment dat pot apărea condiții de „compatibilitate” care dau condiții pentru figura  $F$  ce induce *noțiuni specifice* geometriei  $(\mathcal{M}, G)$  și caracteristici „numerice” pentru  $F'$  ce se transmit lui  $F'$  adică *invarianti* ai geometriei  $(\mathcal{M}, G)$ . Acest mecanism standard este mai degrabă algebric decît geometric și poate conduce la impresia falsă că geometria se subsumează algebrei.

Scurta prezentare de mai sus a „mecanismului standard” a neglijat însă un aspect esențial: „interpretarea geometrică”. În această privință nu se mai pot preconiza „rețete” dar realizarea acestui aspect este ceea ce oferă viabilitate și eleganță studiului unui spațiu Klein. Aceste interpretări geometrice, „momente ale adevărului” în edificarea unei geometrii kleinienne conturează conexiunea organică a geometriei cu alte ramuri ale matematicii; în cazul geometriilor



„elementare” legătura se face mai ales cu algebra dar alte capitole ale geometriei reclamă preponderent topologia sau analiza funcțională; în cadrul geometriei „diferențiale” se realizează un contact intim cu studiul ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale etc.

Apare deci necesitatea de a relua expunerea din acest paragraf inserind în locurile potrivite interpretări geometrice. Vom satisface această necesitate în paragraful următor. S-ar fi putut desigur pregăti interpretările geometriei proiective prezentând în prealabil pe cele ale geometriei afine; noi vom obține geometrie afină plană prin particularizarea celei proiective.

#### § 4. GEOMETRIE PROIECTIVĂ PLANĂ

În paragraful precedent am considerat mulțimea  $P_2 = \mathcal{N}/\gamma$  unde  $\mathcal{N}$  apărea drept mulțime numerică:  $\mathcal{N} = \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ . Putem concepe acum  $\mathbf{R}^3$  nu doar ca mulțime numerică ci ca mulțime  $A_3$  subiacentă unei geometrii afine tridimensionale. Edificarea acestei geometrii se poate realiza urmînd pas cu pas expunerea din § 2 sau reținînd doar o parte din construcția modelului  $\mathcal{G}$  al geometriei euclidiene din cap. V, § 7 (trebuie neglijată funcția distanță ce nu constituie noțiune afină). Vom distinge în  $A_3$  un punct  $O$  ce joacă rolul tripletei  $(0, 0, 0)$  în  $\mathbf{R}^3$ .

Pentru un punct arbitrar  $M$  diferit de  $O$  din  $A_3$  vom considera dreapta  $m = (OM)$ . Dacă  $M$  corespunde punctului  $(m^1, m^2, m^3)$  din  $\mathbf{R}^3$  dreapta  $m$  va conține pe  $O$  și toate acele puncte  $M'$  cărora le corespund terne  $(km^1, km^2, km^3)$ , unde  $k$  este în  $\mathbf{R}^*$ . Echivalența  $\gamma$  din  $\mathcal{N}$  revine la o relație de coliniaritate cu  $O$  pentru puncte din  $A_3 - \{O\}$ , deci o clasă de echivalență în raport cu  $\gamma$  apare ca o dreaptă prin  $O$  a lui  $A_3$ . Am realizat astfel o primă interpretare geometrică a punctelor lui  $P_2$ : mulțimea dreptelor printr-un punct  $O$  al spațiului afin  $A_3$  (ce se mai numește și *snop de drepte*).

Am dori însă mai mult: să interpretăm punctele planului proiectiv tot prin „puncte” și nu prin „drepte”. Ideea constă în alegerea unei suprafețe din  $A_3$  care să taie fiecare dreaptă prin  $O$  într-un singur punct.

Alegerea nu este simplă. O sferă  $\mathcal{S}$  de centru  $O$  taie fiecare dreaptă prin  $O$  dar nu într-un punct ci în două! Această constatare furnizează a doua interpretare geometrică pentru  $P_2$ : o sferă  $\mathcal{S}$  în care se identifică punctele diametral opuse. Putem însă să mai facem încă un pas spre o corespondență punct cu punct reținînd doar o emisferă închisă  $\mathcal{E}$  a lui  $\mathcal{S}$ , delimitată de un cerc mare  $\mathcal{C}$ . Obținem astfel a treia interpretare pentru  $P_2$ : o emisferă închisă  $\mathcal{E}$  în care se identifică punctele diametral opuse „ecuatorului emisferei”.

Putem încerca să interceptăm dreptele prin  $O$  ale lui  $A_3$  cu un plan  $\pi$  neincident cu  $O$ . O dreaptă  $m$  taie  $\pi$  într-un punct unic cu excepția cazurilor  $m \parallel \pi$ . Apare astfel ideea de a mai adăuga planului  $\pi$  anumite puncte „situate la infinit”. Pentru a realiza efectiv această completare vom considera mulțimea  $\mathcal{L}_\pi$  a dreptelor planului  $\pi$  și o vom factoriza prin echivalența furnizată de relația de paralelism. Vom nota  $\mathcal{L}_\pi/\parallel$  prin  $\Delta_\pi$  și clasa de echivalență a unei drepte  $d$ , adică „direcția” dreptei  $d$ , prin  $[d]$ . Pentru mulțimea  $\pi \cup \Delta_\pi$  vom folosi notația  $\bar{\pi}$ . Vom numi puncte și elementele  $[d]$  din  $\Delta_\pi$  dar cînd va fi necesar le vom distinge prin calificativul „impropriu”. Obținem în fine cea de a patra interpretare a lui  $P_2$  rezumată prin formula  $P_2 = \bar{\pi}$ .

Am prezentat patru interpretări geometrice pentru  $P_2$  pentru a argumenta imposibilitatea existenței unei „rețete unice” pentru această etapă strict necesară a edificării geometriei unui spațiu Klein. Pe de altă parte unele noțiuni de geometrie proiectivă plană se vor întui mai ușor pe unele dintre aceste ipostaze geometrice ale lui  $P_2$ . Există și eventualitatea ca prin trecerea de pe un „model” pe altul să pună în evidență idei geometrice remarcabile!

În bună măsură alegerea lui  $P_2$  ca mulțime „geometrică” direcționează căutările spre interpretări ale grupului  $G$ .

Dacă privim  $P_2$  drept snopul de drepte prin  $O$  ale lui  $A_3$  este natural să căutăm un grup  $K$  de transformări ale lui  $A_3$  care să genereze grupul  $G$  pe planul proiectiv  $P_2$ . Unei transformări  $S$  din  $K$  îi vom cere în mod firesc să conserve punctul distins  $O$ . Bazîndu-se din nou pe interpretările „numerice” ale lui  $A_3$  și  $P_2$  deducem că transformarea  $S$  trebuie să aplice  $X = (x^1, x^2, x^3)$  în  $Y = (y^1, y^2, y^3)$ , unde

$$y^i = \sum_{j=1}^3 s_j^i x^j, \quad (i = 1, 2, 3)$$

matricea  $(s_j^i)$  fiind nedegenerată. Ni se sugerează deci să pornim de la un subgrup  $K$  al transformărilor centroafine ale lui  $A_3$ . O transformare  $S$  din  $K$  duce o dreaptă  $d$  într-o dreaptă  $d' = S(d)$ . Evident,  $O \in d \Rightarrow O \in d'$  deci  $S$  induce o transformare  $T = f(S)$  în snopul  $P_2$ . Pe exprimarea analitică se constată ușor că aplicația  $f: K \rightarrow G$  este homomorfism de grupuri. Matricile transformărilor  $S$  și  $f(S)$  sînt identice și prin urmare  $f$  va fi izomorfism dacă subgrupul ales  $K$  mai are și proprietatea

$$\forall S \in K, \quad \forall k \in \mathbf{R}^*: k \cdot S \in K \Rightarrow k = 1.$$

Putem realiza aceasta impunînd  $|\det(s_j^i)| = 1$  ceea ce revine la a spune că transformarea  $S$  este și echiafină. Putem deci interpreta  $G$



drept grupul transformărilor centro- și echiifine ale lui  $A_3$  (cu condiția de a transfera prin izomorfismul  $f$  acțiunea transformărilor de pe spațiul afin  $A_3$  pe snopul  $P_2$ ).

Apreciem că interpretările a doua și a treia ale lui  $P_2$  nu sînt utile pentru interpretarea geometrică a lui  $G$ . Pentru cea de a patra interpretare a lui  $P_2$  vom constata însă că alegerea cuplului  $(0, \pi)$  este arbitrară în afara condiției  $0 \notin \pi$ . Vom analiza semnificația modificării cuplului  $(0, \pi)$  printr-un alt cuplu  $(O', \pi')$  presupunînd inițial că  $\pi$  și  $\pi'$  nu sînt paralele.

Păstrăm pentru moment punctul  $O$  și înlocuim planul  $\pi$  prin  $\pi'$ . Determinăm astfel o funcție  $f$  ce asociază punctului  $M$  din  $\pi$  punctul  $M' = f(M)$  din  $\pi'$  determinat astfel încît  $O, M, M'$  să fie coliniare. (Funcția  $f$  este caracteristică geometriei proiective; aici însă o socotim încă insuficientă deoarece nu are drept codomeniu aceeași mulțime  $\pi$ .) Trebuie observat că, fără a-i adăuga planului  $\pi'$  punctele improprii, nu am fi putut defini  $f$  în cazurile cînd  $(OM) \parallel \pi'$ ; punctele improprii din  $\pi$  sînt aplicate de  $f$  în puncte proprii ale lui  $\pi'$ . Evident,  $f$  este o bijecție. Considerații analoge referitoare la  $O'$  în loc de  $O$  permit introducerea unei funcții  $f' : \pi' \rightarrow \pi$ , unde  $f'(M')$  este punctul  $M_1$  comun dreptei  $O'M'$  și planului completat  $\pi$ . Vom considera funcția  $F = f' \circ f$  ce constituie o bijecție a mulțimii  $P_2 = \pi$  în ea însăși. Deoarece  $F$  este o aplicație rezultată din arbitraritatea alegerii unui exemplar „geometric” al mulțimii  $P_2$  apare firească cerința ca  $F$  să fie element al grupului proiectiv  $G$ . (În caz contrar interpretarea geometrică a lui  $P_2$  nu ar fi compatibilă

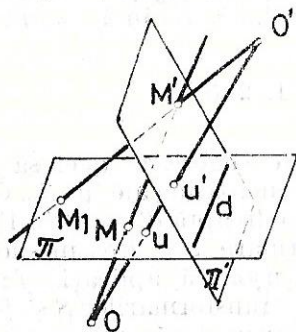


Fig. 34

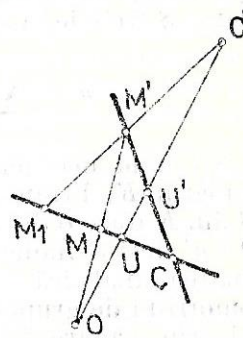


Fig. 35

cu grupul dat,  $G$ ). Datorită importanței funcției  $F$  vom încerca să o caracterizăm în termeni specifici planului  $\pi$ .

Se demonstrează ușor că dreapta  $d = \pi \cap \pi'$  conține puncte fixe ale transformării  $F$ . În afara acestei drepte mai există un singur

punct fix, anume punctul  $U$  comun dreptei  $OO'$  și planului  $\pi$ . (Dacă  $OO' \parallel \pi$ ,  $U$  este punct impropriu.) Vom considera un plan arbitrar  $\mu$  prin  $(OO')$ ; figura 35 reprezintă intersecția planului  $\mu$  cu configurația ilustrată de figura 34 și este destinată clarificării definiției punctului  $M_1 = F(M)$ . Se consideră și punctele  $U' \in (OO') \cap \pi'$ ,  $C \in d \cap \mu$ . Aplicînd de două ori relația lui Menelaos pentru triunghiul  $UCU'$

deducem:  $\frac{M'C}{M'U'} \cdot \frac{MU}{MC} \cdot \frac{OU'}{OU} = 1 = \frac{M_1U}{M_1C} \cdot \frac{M'C}{M'U'} \cdot \frac{O'U'}{O'U}$ . Ob-

ținem de aici  $\frac{MU}{MC} \cdot \frac{M_1C}{M_1U} = \frac{OU}{OU'} \cdot \frac{O'U'}{O'U}$ , egalitate ce se exprimă

mai concis cu ajutorul birapoartelor:  $(U, C; M, M_1) = (U, U'; O, O')$ . Membrul secund este independent de punctul  $M$  din  $\pi$ , deci, pentru funcția  $F$  considerată, este o constantă  $k$ . La aceeași concluzie am fi ajuns (pe căi ce nu diferă esențial de cea urmată mai sus) și dacă  $U$  ar fi fost punct impropriu sau incident dreptei  $d$ .

Avînd în planul completat  $\pi$  dreapta  $d$  și punctul  $U \notin d$  și cunoscînd constanta  $k \in \mathbf{R}$  avem posibilitatea să redefinim funcția  $F : \pi \rightarrow \pi$  pe baza formulei

$$(4.1) \quad F(M) = M_1 \wedge C = d \frown (UM) \Rightarrow (U, C; M, M_1) = k.$$

Un calcul algebric ce îl evităm aici datorită caracterului său prea tehnic asigură că transformările  $F$  mai sus considerate (numite *omologii generale*) generează grupul  $G$ . Avem astfel și interpretarea geometrică a grupului  $G$ .

Continuăm cu prezentarea interpretărilor noțiunilor asociate în paragraful precedent spațiului Klein ( $P_2, G$ ).

Condiția de coliniaritate a punctelor  $A, B, C$  revine în cadrul primei interpretări a lui  $P_2$  la condiția de coplanaritate a dreptelor  $a = (OA)$ ,  $b = (OB)$ ,  $c = (OC)$ . O dreaptă  $d$  a spațiului proiectiv  $P_2$  se identifică deci cu un fascicul de drepte prin  $O$ , situat într-un plan  $\alpha$ . În cadrul celei de a doua interpretări (pe sfera  $\mathcal{S}$  în care se identifică punctele diametral opuse) concepem o dreaptă drept un cerc mare al sferei în care identificăm punctele diametral opuse etc. În cadrul ultimei interpretări,  $P_2 = \pi$ , o dreaptă  $a$  se obține adăugînd punctelor unei drepte  $d$  punctul său impropriu  $[d]$  dar există și o dreaptă „improprie”  $m$  ce apare cînd  $\alpha \parallel \pi$ ; punctele acestei drepte  $m$  sînt punctele improprii ale lui  $\pi$ , adică  $m = \Delta_\pi$ .

Și principiul dualității admite concretizări remarcabile în cadrul interpretării geometrice  $P_2 = \pi$ . Se consideră în acest scop o conică  $\Gamma$  (nede generată, cu centru) în  $\pi$ . Fiecărui punct  $M$  din  $\pi$  i se aso-



ciază polara  $m$  a lui  $M$  față de  $\Gamma$ . (O dreaptă variabilă  $u$  prin  $M$  taie  $\Gamma$  în puncte  $A, B$  și există un punct  $U$  pe  $u$  încît  $(A, B; M, U) = -1$ ; cînd  $u$  variază,  $U$  este pe dreapta  $m$ .) Dacă în locul lui  $M$  se ia un punct impropriu,  $[d]$ , i se asociază diametrul  $\delta$  conjugat direcției  $[d]$  (locul geometric al mijloacelor corzilor lui  $\Gamma$  paralele cu  $d$ ). Atașăm astfel conicei  $\Gamma$  o aplicație  $\gamma$  de la  $\mathbf{P}_2$  la mulțimea  $\mathcal{L}$  a dreptelor lui  $\mathbf{P}_2$ . Putem apoi extinde  $\gamma$  și la  $\mathcal{L}$  pe baza formulei  $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cup \gamma(B)$ . Aplicația astfel extinsă,  $\gamma$ , este o bijecție a mulținii  $\mathbf{P}_2 \cup \mathcal{L}$  în ea însăși numită *polaritate față de conica  $\Gamma$* . Principiul dualității se concretizează acum astfel:

Înlocuind într-o propoziție  $P$  de geometrie proiectivă plană punctele și dreptele prin polarele lor și substituind între ele operațiile de uniune și intersecție obținem o propoziție  $P'$ ;  $P$  și  $P'$  sînt simultan adevărate.

Pentru biraportul  $(A, B; C, D)$  a patru puncte coliniare s-a conturat pe parcursul acestui paragraf interpretarea:

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)},$$

unde, în membrul secund, numitorul și numărătorul sînt rapoarte simple ce au fost definite prin formula (2.5). Vom atrage aici atenția doar asupra unui fapt neglijat în paragraful precedent.

**Teorema 4.1.** Dacă  $A, B, C$  sînt puncte coliniare distincte și asociem punctului arbitrar  $X$  al dreptei  $A \cup B$  biraportul  $f(X) = (A, B; C, X)$  obținem o bijecție  $f$  de la  $A \cup B$  la mulțimea  $\mathbf{R} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ .

Completarea lui  $\mathbf{R}$  cu „numărul impropriu” este necesară pentru a surprinde eventualitatea  $X = A$ ; atunci cînd  $X$  este punctul impropriu al dreptei (propriu)  $(AB)$  are loc  $(A, B; C, X) = (A, B; C)$ .

Pe baza noțiunii geometrice de biraport teoremele 3.3 și 3.4 pot beneficia de demonstrații geometrice care, fără a fi foarte simple, sînt preferabile demonstrațiilor algebrice preconizate în paragraful precedent.

Așa cum anunțasem în finalul paragrafului 3, intenționez să deducem geometria afină prin particularizarea celei proiective. Vom considera deci geometria proiectivă plană reală  $(\mathbf{P}_2, G)$  și ne vom fixa atenția asupra unei drepte proiective  $\mathcal{A}$ . Pentru ca transformarea proiectivă  $F$  dată de (4.1) să conserve această dreaptă  $\mathcal{A}$  (fără a învia fiecare din punctele ei) se impune să aibă loc  $U \in \mathcal{A}$ . Inter-

pretind  $\mathbf{P}_2 = \pi$ , este natural să presupunem că  $\mathcal{A}$  este dreapta impropriu și prin urmare să particularizăm figurile 34 și 35 considerînd  $OO' \parallel \pi$ . Pe figură 36 ce preia rolul figurii 35 deducem ușor următoarea caracterizare a funcției  $F: \pi \rightarrow \pi$ :

$$(4.2) \quad F(M) = M_1 \Leftrightarrow C \in d \wedge MC \parallel OO' \wedge (M, M_1; C) = k,$$

unde  $k = (O, O'; U')$ .

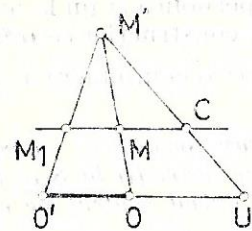


Fig. 36

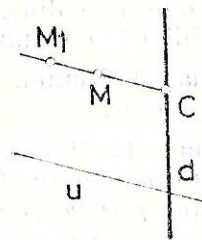


Fig. 37

Renunțînd la elementele exterioare planului  $\pi$ , vom redefini transformarea  $F$  cu ajutorul dreptei  $d$ , a unei direcții  $[u]$  din  $\pi$ , unde  $d \notin [u]$  și a numărului real nenul  $k$ . Pentru punctul arbitrar  $M \in \pi$  vom determina unic  $C \in d$  încît  $MC \parallel u$  și apoi vom determina unic  $M_1 = F(M)$  prin condiția  $CM_1 = k \cdot CM$ . Transformarea  $F$  obținută este descrisă prin denumirea: *dilatate afină în direcția  $[u]$ , de axă  $d$  și de raport  $k$* . Desigur, dacă are loc  $0 < k < 1$  termenul de *contractie* este mai sugestiv decît cel de *dilatate*, iar pentru  $k < 0$  trebuie să avem în vedere că  $M_1$  și  $M$  sînt semiplane distincte față de  $d$ .

Se obține imediat:

**Teorema 4.2.** Dilatarea afină  $F$  de direcție  $[u]$ , axă  $d$  și raport  $k$ :  
1° conservă punctele dreptei  $d$ ; 2° conservă dreptele de direcție  $u$  și axa  $d$ ; 3° transformă drepte în drepte; 4° păstrează raportul simplu a trei puncte coliniare.

Se poate demonstra fără dificultăți majore următorul rezultat:

Orice transformare afină a planului  $\pi$  se obține compunînd astfel de dilatări afine  $F$ .

## § 5. PLANUL HIPERBOLIC

Considerăm un plan euclidian  $\mathbf{E}_2$  în care fixăm o dreaptă  $a$  ce o vom numi *absolut* și un semiplan deschis  $S$  delimitat de  $a$  în  $\mathbf{E}_2$ . Elementele mulținii  $S$  sînt puncte; pentru a le diferenția de elemen-



tele din  $E_2 - S$  le vom numi  $h$ -puncte. Dacă  $d$  este o dreaptă perpendiculară pe  $a$ , simetria  $S_d$  a planului  $E_2$  față de dreapta  $d$  admite o restricție  $T_d$  ce este bijecție a mulțimii  $S$  în ea însăși. Fie  $\mathcal{C}$  un cerc avînd centrul  $C$  pe absolutul  $a$ . Inversiunea  $\mathcal{I}$  față de cercul  $\mathcal{C}$  admite o restricție  $T_{\mathcal{C}}$  care este o bijecție a mulțimii  $S$  în ea însăși. Vom folosi pentru transformările  $T_d$  și  $T_{\mathcal{C}}$  denumirea comună de  $h$ -simetrii, putînd deosebi „tipul” lor după caracterul tipografic al indicelui. Prezența prefixului „ $h$ ” este destinată evocării faptului că denumirea se referă la o noțiune din geometria hiperbolică și nu la una din geometria euclidiană ce furnizează cadrul construcției ce o facem.

**Definiția 5.1.** Numim  $h$ -transformare o compunere a unui număr finit de  $h$ -simetrii.

**Teorema 5.1.** Mulțimea  $H$  a  $h$ -transformărilor constituie grup în raport cu compunerea. În  $H$  există și restricții la  $S$  a translațiilor de direcție  $[a]$  precum și a omoteliilor avînd centrul pe absolutul  $a$ .

*Demonstrație.*  $H$  este o mulțime a familiei  $\mathcal{B}(S)$  constituită din bijecțiile mulțimii  $S$ , evident stabilă în raport cu compunerea. Transformarea identică  $I = 1_S$  poate fi prezentată sub forma  $I = T_d \circ T_d$  sau  $I = T_{\mathcal{C}} \circ T_{\mathcal{C}}$  întrucît și simetriile față de o dreaptă și inversiunile sînt transformări involutive. Înversa  $h$ -mișcării  $T = T_{\alpha} \circ \dots \circ T_{\beta} \circ T_{\alpha}$  este evident  $h$ -transformarea  $T^{-1} = T_{\alpha} \circ T_{\beta} \circ \dots \circ T_{\alpha}$ . (Aici și în continuare pentru a nu preciza „tipul” unei  $h$ -simetrii folosim indici grecești.) Conform unui rezultat din cap. V, § 5, compunerile  $T_d \circ T_{\mathcal{C}}$  reprezintă translații. Prin calcul direct se observă  $\mathcal{I}(O, k) \circ \mathcal{I}(O, h) = H\left(O, \frac{k}{h}\right)$ , q.e.d.

**Definiția 5.2.** Numim *geometrie hiperbolică plană* geometria spațiului Klein  $[S, H]$ .

Spre deosebire de geometriile kleinienne studiate în paragrafele 2 și 3 acum nu avem o exprimare analitică a  $h$ -transformărilor și se impune un studiu *sintetic* al  $h$ -transformărilor. Vom direcționa studiul geometriei spațiului Klein  $(S, H)$  spre definirea unor interpretări pentru noțiunile și relațiile primare din geometria euclidiană și spre verificarea axiomelor din sistemul lui Hilbert. În paragrafele 3 și 8 ale capitolului precedent am constatat că mulțimea alcătuită din drepte și cercuri este stabilă în raport cu simetrii față de drepte și inversiuni. Această observație ne sugerează definiția următoare:

**Definiția 5.3.** Numim  $h$ -dreaptă intersecția cu  $S$  a:

- 1° unei drepte perpendiculare pe absolutul  $a$ ;
- 2° unui cerc cu centrul pe absolutul  $a$ .

Pentru a preciza și „forma” unei drepte (în raport cu spațiul euclidian) vom înlocui prefixul „ $h$ ” prin „ $hs$ ” în primul caz și prin „ $hg$ ” în al doilea caz; literele  $s$  și  $g$  sînt prescurtări ale calificativelor „specială” respectiv „generică” ce vor însoți uneori termenul de  $h$ -dreaptă. Observația ce a precedat definiția conduce la următoarea precizare strict necesară.

**Teorema 5.2.** Noțiunea de  $h$ -dreaptă este invariata de  $h$ -transformări.

Vom nota prin  $\mathcal{D}$  mulțimea  $h$ -dreptelor din  $(S, H)$ . Se poate înțelege acum în mod efectiv ideea ce a stat la baza realizării figurilor 1—12 care au ilustrat prima parte a capitolului V.

**Teorema 5.3.** Pentru tripletul  $(S, \mathcal{D}, \epsilon)$  sînt îndeplinite axiomele de incidență  $I_1, I_2, I_3$  referitoare la geometria plană din sistemul axiomatic al lui Hilbert.

Vom argumenta doar valabilitatea axiomei  $I_1$ . Fie  $h$ -puncte  $A, B$ . Dacă  $A = B$ , o  $h$ -dreaptă prin  $A$  este furnizată de exemplu de perpendiculara din  $A$  pe absolutul  $a$ . Dacă  $A \neq B$ , fie  $m$  mediatore (euclidiană) a segmentului  $AB$ . Dacă  $m$  taie  $a$  într-un punct  $O$ , cercul  $\mathcal{C}(O, OA)$  intersectează  $S$  după o  $h$ -dreaptă prin  $A, B$ . Dacă  $m \parallel a$  rezultă că dreapta (euclidiană)  $AB$  este perpendiculară pe  $a$ , deci intersectează  $S$  după o  $h$ -dreaptă.

Vom nota prin  $(AB)_h$  singura  $h$ -dreaptă ce trece prin punctele distincte  $A, B$ . Dacă  $(AB)_h$  este  $hg$ -dreaptă, ea se obține intersectînd  $S$  cu un cerc  $\mathcal{C}_{A,B}$ ; Ne vom referi la punctele  $U, V$  de intersecție ale cercului  $\mathcal{C}_{A,B}$  cu absolutul  $a$  numindu-le *punctele limită* ale lui  $(AB)_h$ . Evident  $U, V$  nu sînt  $h$ -puncte. Dacă  $(AB)_h$  este  $hs$ -dreaptă putem pune în evidență un singur punct limită  $Z \in (AB) \cap a$ .

**Definiția 5.4.** Pentru  $h$  puncte distincte  $A, B$  considerăm mulțimea  $\text{Int}_h AB$  ce o definim în modul următor:

- dacă  $(AB)_h$  este  $hs$ -dreaptă, atunci  $\text{Int}_h AB = |AB| = \{X: A - X - B\}$ ;
- dacă  $(AB)_h$  este  $hg$ -dreaptă, atunci

$\text{Int}_h AB$  este acel arc  $\widehat{AB}$  al cercului euclidian  $\mathcal{C}_{A,B}$  ce este complet conținut în  $S$ . Pentru  $h$  puncte  $X$  ce satisfac  $X \in \text{Int}_h AB$  spunem că sînt *interioare*  $h$ -segmentului  $AB$  și notăm  $A - \underset{h}{X} - B$  (se citește  $X$  este  $h$ -între  $A$  și  $B$ ). Mulțimea  $\text{Int}_h AB$  va fi numită *interiorul hiperbolic* al lui  $\{A, B\}$ .

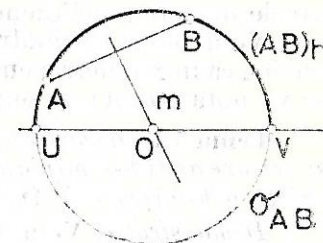


Fig. 38







Vom folosi în acest caz notația  $AB =_h CD$ ; nu este necesară o complicare suplimentară a notației deoarece prezența indicelui  $h$  nu numai că evocă „geometria hiperbolică” dar și distinge relația binară  $=_h$  de egalitatea = a mulțimilor.

**Teorema 5.6.** Pentru noțiunile de geometrie hiperbolică introduse sînt îndeplinite axiomele  $\text{III}_1$  și  $\text{III}_2$ .

**Demonstrație.** Pentru axioma  $\text{III}_1$  considerăm  $h$ -punctele  $A, B$  și o  $h$ -semidreaptă  $\alpha' = (A'; N)_h$ . Conform lemei 5.1 va exista o  $h$ -transformare  $T$  care să aplice  $h$ -semidreapta  $\alpha = (A; B)_h$  pe  $\alpha'$ . (Nu ne interesează acțiunea lui  $T$  asupra semiplanelor.) Notînd  $T(B) = B'$  deducem imediat  $B' \in \alpha'$  și  $AB =_h A'B'$ . Axioma  $\text{III}_2$  este consecință imediată a definiției 5.5. Teorema este astfel complet demonstrată.

În continuare vom considera cunoscut numărul real  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  precum și funcția „logaritm natural” (sau logaritm în baza  $e$ )  $\ln: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ , unde  $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$ . Cu aceste pregătiri, vom construi prin următoarele trei condiții o funcție  $d_h: S \times S \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ :

1° Pentru orice  $h$ -punct  $A$  are loc:

$$(5.1) \quad d_h(A, A) = 0$$

2° Dacă  $(AB)_h$  este  $hs$ -dreaptă de punct limită  $Z$ , atunci:

$$(5.2) \quad d_h(A, B) = \left| \ln \frac{AZ}{BZ} \right|.$$

3° Dacă  $(AB)_h$  este  $hg$ -dreaptă de puncte limită  $U, V$ , atunci

$$(5.3) \quad d_h(A, B) = \left| \ln \left( \frac{UA}{UB} : \frac{VA}{VB} \right) \right|.$$

**Teorema 5.7.** Dacă  $T$  este  $h$ -transformare și  $T(A) = C$ ,  $T(B) = D$ , atunci  $d_h(C, D) = d_h(A, B)$ .

**Demonstrația** va aborda succesiv cazurile particulare cînd  $T$  este  $h$ -simetrie  $T_a$  respectiv  $T_g$ . Avînd în vedere structura grupului  $H$  aceste două cazuri particulare sînt suficiente.

Pentru  $T = T_a$ , notînd cu  $W$  simetricul față de dreapta  $d$  al punctului limită  $Z$ , respectiv  $X, Y$  simetricile față de dreapta  $d$  ale lui  $U, V$  constatăm ușor:  $A = B \Leftrightarrow C = D$ ,  $\frac{CW}{BW} = \frac{AZ}{BZ}$  (în ca-

zul 2°) și  $\frac{XC}{XD} : \frac{YC}{YD} = \frac{UA}{UB} : \frac{VA}{VB}$  (pentru cazul 3°), deci  $d_h(C, D) = d_h(A, B)$ .

Fie  $T = T_g$  restricția la  $S$  a inversiunii  $\mathcal{I}(O, p)$ . Dacă  $(AB)_h$  este  $hs$ -dreaptă,  $(CD)_h$  este, conform teoremei 8.3, cap. VII, o  $hg$ -dreaptă cu puncte limită  $O$  și  $V = \mathcal{I}(O, p)(Z)$ . Au loc în acest caz egalitățile  $AZ = \frac{p \cdot CV}{OC \cdot OV}$  și  $BZ = \frac{p \cdot DV}{OD \cdot OV}$  încît  $\frac{AZ}{BZ} = \frac{CV}{DV} : \frac{OC}{OD}$ , adică  $d_h(A, B) = d_h(C, D)$ .

Dacă  $(AB)_h$  este  $hg$ -dreaptă de puncte limită  $U, V$  vom presupune  $U \neq O \neq V$  (altfel am avea de reluat în sens invers calculul de mai sus). În acest caz  $(CD)_h$  are punctele limită  $X, Y$  imaginile prin  $\mathcal{I}(O, p)$  ale lui  $U$  respectiv  $V$ . (Vezi teoremele 8.4 și 8.2 din capitolul VII.) Constatăm

$$AU = \frac{p \cdot CX}{OC \cdot OX}, \quad BU = \frac{p \cdot DX}{OD \cdot OX}, \quad AV = \frac{p \cdot CY}{OC \cdot OY}, \quad BV = \frac{p \cdot DY}{OD \cdot OY}$$

și urmează imediat  $d_h(A, B) = d_h(C, D)$ , q.e.d.

**Teorema 5.8.** Condiția necesară și suficientă pentru  $AB =_h CD$  este  $d_h(A, B) = d_h(C, D)$ .

Necesitatea rezultă direct din definiția 5.5 și teorema 5.7 după simpla observație a „simetriei” funcției  $d_h$ , anume:

$$(5.4) \quad \forall A, B \in S: d_h(A, B) = d_h(B, A).$$

Pentru suficiență, în ipoteza  $0 \neq d_h(A, B) = d_h(C, D)$  vom considera o  $h$ -transformare  $T$  ce aplică  $[A; B]_h$  în  $[C; D]_h$  ca în lema 5.1. Nu restrîngem generalitatea presupunînd  $[C; D]_h = [CZ]$  deoarece acționînd asupra  $h$ -punctelor date inițial  $A, B, C, D$  cu o  $h$ -transformare nu alterăm ipotezele. Are loc desigur  $T(A) = C$  și fie  $E = T(B)$ . Urmează imediat  $d_h(C, D) = d_h(A, B) = d_h(C, E)$ . Prin precizările făcute egalitatea obținută se explicitează în  $\frac{CZ}{DZ} = \frac{CZ}{EZ}$ , de unde  $E = D$  deci  $D = T(C)$ , adică  $AB =_h CD$ , q.e.d.



Făcînd mîci adăugiri demonstrației de mai sus deducem:

**Teorema 5.9.** Oricare ar fi numărul real nenegativ  $x$  și  $h$ -semidreapta  $[A; B)_h$ , există un punct unic  $X$  pe această  $h$ -semidreaptă încît  $d_h(A, X) = x$ . Dacă  $x = 0$ , atunci  $X = A$ .

**Teorema 5.10.** Dacă  $A \underset{h}{-} B \underset{h}{-} C$ , atunci  $d_h(A, C) = d_h(A, B) + d_h(B, C)$ .

*Demonstrație.* Conform teoremei precedente și lemei 5.2 nu restrîngem generalitatea presupunînd  $(AB)_h$  o  $h$ -semidreaptă de punct limită  $Z$  încît  $A \underset{h}{-} B \underset{h}{-} C$  și  $B \underset{h}{-} C \underset{h}{-} Z$ . Urmează  $d_h(A, B) + d_h(B, C) = \ln \frac{AZ}{BZ} + \ln \frac{BZ}{CZ} = \ln \frac{AZ}{CZ} = d_h(A, C)$ , q.e.d.

Drept consecință imediată deducem:

**Teorema 5.11.** În cadrul geometriei hiperbolice este valabilă axioma  $\text{III}_3$  din sistemul axiomatic al lui Hilbert.

Analag geometriei euclidiene, se numește  $h$ -unghi o pereche de  $h$ -semidrepte avînd aceeași origine. Pentru o astfel de pereche,  $\{[O; A)_h, [O; B)_h\}$  vom folosi notația  $\underset{h}{\ast}AOB$ . Latura  $[O; A)_h$  a unui  $h$ -unghi este o curbă în planul euclidian (semidreaptă, interior de segment de dreaptă sau arc de cerc); îi putem asocia totdeauna semidreapta euclidiană de origine  $O$ , „tangentă” la  $[O; A)_h$ . Asociînd astfel ambelor laturi a unui  $h$ -unghi  $\underset{h}{\ast}AOB$  semidrepte euclidiene  $[O; X)$ ,  $[O; Y)$ , atașăm  $h$ -unghiului  $\underset{h}{\ast}AOB$  un unghi euclidian

$\widehat{XOY}$  la care vom referi notația  $\widehat{\underset{h}{\ast}AOB} = [\underset{h}{\ast}AOB]$ . Pentru măsura

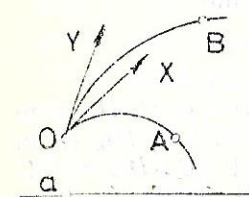


Fig. 40

în radiani a unghiului euclidian  $XOY$  vom folosi notația  $(\underset{h}{\ast}AOB)$ . Această convenție de notație este compatibilă cu geometria spațiului Klein (concret)  $(S, H)$  deoarece  $h$ -transformările conservă unghiul a două curbe. (A se vedea teoremele 3.1, 2.3 și 8.5 din capitolul VII.) Definim acum în mod natural relația de congruență a  $h$ -unghiurilor pentru care vom folosi același simbol = ca la congruența  $h$ -segmentelor:

$$\underset{h}{\ast}AOB = \underset{h}{\ast}A'O'B' \Leftrightarrow (\underset{h}{\ast}AOB) = (\underset{h}{\ast}A'O'B').$$

**Teorema 5.12.** Pentru ansamblul  $(S, \mathcal{D}, \in, \underset{h}{?} - \underset{h}{?} - \underset{h}{?}, \underset{h}{=})$  se verifică axiomele din grupele I—IV ale lui Hilbert și o negație a axiomei V.

*Demonstrație.* Prin teoremele 5.3, 5.5, 5.6 și 5.11 au fost verificate axiomele ce preced în sistemul lui Hilbert axioma  $\text{III}_4$ .

Pentru a verifica axioma  $\text{III}_4$  să presupunem date  $\underset{h}{\ast}AOB$ ,  $[O'; C)_h$  și un  $h$ -sempiplan  $C$  delimitat de  $(O'C)_h$ . Există două variante distincte pentru a ne asigura de existența unei  $h$ -semidrepte unice  $[O'; D)_h$  încît  $\underset{h}{\ast}AOB = \underset{h}{\ast}CO'D$ .

În prima variantă considerăm  $\widehat{XOY} = [\underset{h}{\ast}AOB]$  și semidreapta euclidiană  $[O'; U)$  tangentă la  $[O'; C)_h$ . Se pune în evidență un semiplan  $C'$  delimitat de dreapta (euclidiană)  $O'U$  ce conține tangentele la  $h$ -semidreptele prin  $O'$  situate în  $C$  și se determină o semi-

dreaptă unică  $(O'; V)$  inclusă în  $C'$  încît  $\widehat{XOY} \equiv \widehat{UO'V}$ . Dacă  $O'V$  este perpendiculară pe absolutul  $a$ , atunci  $[O'; V) \cap S$  este  $h$ -semidreapta căutată  $[O'; D)_h$ . În caz contrar există un punct unic  $Z$  pe absolutul  $a$  încît  $ZO' \perp O'V$ ; cercul de centru  $Z$  ce trece prin  $O'$  intersectează  $C$  după  $h$ -semidreapta căutată. (Demonstrația este dată mai detaliat în [12], pag. 79—80).

În actualul context preferăm următoarea variantă de demonstrație a existenței din axioma  $\text{III}_4$ . Fie  $B$   $h$ -sempiplanul delimitat de  $(OA)_h$  ce conține  $A$ . Conform lemei 5.1 există o  $h$ -transformare  $T$  ce aplică  $[O; A)_h$  pe  $[O'; C)_h$  și  $B$  pe  $C$ . Fie  $[O'; D)_h = T([O; B)_h)$ . Are loc evident  $\underset{h}{\ast}AOB = \underset{h}{\ast}CO'D$ . (Pentru unicitate vom apela la varianta inițială.) Prin această a doua variantă de demonstrație putem stabili imediat că definiția dată pentru congruența  $h$ -unghiurilor este echivalentă cu existența unei  $h$ -transformări care să aplice  $h$ -laturile primului  $h$ -unghi pe  $h$ -laturile celui de-al doilea.

Stabilim valabilitatea axiomei  $\text{III}_5$ . Fie  $(A, B, C)$  și  $(A', B', C')$  triplete de  $h$ -puncte ce nu sînt  $h$ -coliniare încît  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  și  $\underset{h}{\ast}BAC = \underset{h}{\ast}B'A'C'$ . Din  $AB = A'B'$  deducem existența unei  $h$ -transformări  $T$  care să aplice  $A, B$  în  $A', B'$ . Fie  $T(C) = D$ . Putem presupune fără a restrînge generalitatea că  $D$  este în acel  $h$ -sempiplan delimitat de  $(A'B')_h$  în care este  $C'$  deoarece, în caz contrar, am înlocui  $T$  prin  $T' \circ T$ , unde  $T'$  este  $h$ -simetria față de



$(A'B')_h$ . Deducem că  $T$  aplică  $\star BAC$  pe  $\star B'A'D$  și, bazându-ne pe demonstrația dată mai sus axiomei  $\text{III}_4$ , conchidem  $[A'; D]_h = [A'; C']_h$ . Avem însă  $d_h(A', D) = d_h(A, C) = d_h(A'C')$ . Prin teorema 5.9 rezultă  $D = C'$ . Să observăm acum că imaginea prin  $h$ -transformarea  $T$  a  $h$ -semidreptei  $[B; C]_h$  este o  $h$ -semidreaptă  $[B'; E]_h$  ce conține punctul  $C' = T(C)$  deci coincide cu  $[B'; C']_h$ . Urmează imediat  $\star ABC = \star A'B'C'$ , deci tocmai concluzia axiomei  $\text{III}_5$ .

Acordăm aici importanță mai mică axiomelor de continuitate, deoarece Hilbert a demonstrat, [50], că acestea sînt consecințe ale axiomelor din grupele I, II, III cărora li se adaugă axioma  $\neg V$ .

Considerăm o  $hg$ -dreaptă  $b$  figurată pe model de un semicerc limitat în  $U, V$  de absolutul  $a$ , avînd centrul  $W$ . Fie  $c$  tangenta (euclidiană) paralelă (în sens euclidian) la  $a$ , și  $O$  punctul de contact. Vom defini o funcție  $f: b \rightarrow c$  asociind  $h$ -punctului  $X \in b$  punctul  $Y = f(X) \in c$ , unde  $Y \in b \cap (Z; Y)$ . Funcția  $f$  este evident biunivocă și compatibilă cu relațiile „a fi între”.

$$A \underset{h}{-} B \underset{h}{-} C \Leftrightarrow f(A) - f(B) - f(C).$$

Prin existența acestei echivalențe apare evident că axioma lui Cantor,  $\text{IV}_2$ , este îndeplinită simultan pe  $h$ -dreapta  $b$  și pe dreapta  $c$ , satisfacerea ei pe dreapta euclidiană  $c$  fiind asigurată direct.

Folosind notația  $\widehat{VWX} = 2u$ , calculăm ușor:

$$d_h(O, X) = \left| \ln \frac{OU}{OV} : \frac{XU}{XV} \right| = \left| \ln \frac{XV}{XU} \right| = |\ln \operatorname{ctg} u|.$$

Construim o nouă funcție  $g: b \rightarrow [O; T)$ , unde  $T$  și  $V$  sînt în același semiplan delimitat de dreapta  $OW$ , punînd  $g(X) = Z$  dacă  $[W; Z]$  este bisectoarea interioară a unghiului  $VWX$ . Luînd ca unitate de măsură a segmentelor (euclidiene) raza  $ZO$  obținem:

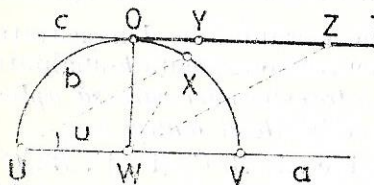


Fig. 41

$$OZ = \operatorname{ctg} u, \text{ deci } d_h(O, X) = |\ln OZ|.$$

Egalitatea stabilită reduce la un simplu calcul algebric transferarea valabilității axiomei lui Arhimede de la dreapta euclidiană  $c$  la  $h$ -dreapta generică  $b$ .

În acest moment sîntem asigurați că în  $(S, H)$  sînt îndeplinite axiomele lui Hilbert din grupele I—IV, deci și toate consecințele lor ce alcătuiesc geometria absolută. În particular, este asigurată, conform teoremei 6.1 din capitolul V, existența unei paralele canonice  $b$  prin  $A$  nesituat pe  $a$ , la  $a$ . (Avînd în vedere că  $S$  este „plan” și nu spațiu tridimensional nu mai este necesară precizarea că  $b$

este în planul definit de  $A$  și  $a$ ). Deci negația axiomei V va fi o propoziție ușor de precizat ce o formulăm direct în termenii specificației modelului:

$\neg V$ . Există un  $h$ -punct  $A$  și o  $h$ -dreaptă  $d$  neincidentă cu  $A$  încît există prin  $A$  cel puțin două  $h$ -drepte distincte paralele cu  $d$ .

Într-adevăr, pentru o  $h$ -dreaptă generică  $d$  și un  $h$ -punct arbitrar  $A$  vor exista  $h$ -drepte distincte,  $c_i$ , care să treacă prin  $A$  și să nu taie  $d$ . Pe figura 42 apar și astfel de  $h$ -drepte „limită”  $p_1, p_2$  fiecare avînd cîte un punct limită comun cu  $d$ ; orice  $h$ -dreaptă aflată „între”  $p_1$  și  $p_2$  va avea proprietatea menționată. Constatăm astfel că în geometria hiperbolică nu este îndeplinită axioma V ci negația sa,  $\neg V$ .

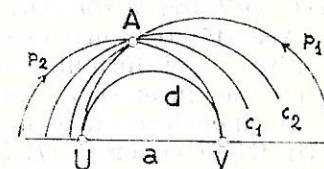


Fig. 42

Drept consecință a teoremei 5.12 remarcăm

**Teorema 5.13.** Axioma paralelelor, V, este independentă de celelalte axiome din sistemul lui Hilbert.

Într-adevăr, am construit în acest paragraf un model al geometriei plane în care singura axiomă neverificată este V. Un model spațial ar fi fost construit în mod analog luînd  $S$  un semispațiu delimitat de un plan  $\alpha$ ,  $h$ -planele fiind intersecțiile cu  $S$  ale sferelor sau planelor perpendiculare pe  $\alpha$ ;  $h$ -dreptele sînt intersecții de  $h$ -plane și restui noțiunilor (și demonstrațiilor) se păstrează în acest context mai amplu.

Prin creionarea geometriei hiperbolice plane a apărut posibilitatea de a recaracteriza și redefini  $h$ -transformările  $T$  din  $H$  în mod „intrinsec” (folosind doar geometria construită pe mulțimea subiacentă

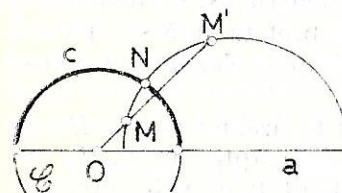


Fig. 43

deci  $h$ -dreapta  $(MM')_h$  este perpendiculară pe  $c$ . Dacă notăm cu  $N$   $h$ -punctul comun acestor două  $h$ -drepte, are loc evident  $T(N) = N$  și de aici  $MN = M'N$ . Putem deci caracteriza  $h$ -transformarea  $T$ .











rior de 1. Există numărul real  $m = \sup K$ . Fie  $M = f(m)$  și  $\alpha = [A; M]$ .

Să presupunem prin absurd că  $\alpha$  și  $\beta$  au un punct comun  $E$ . Fie  $F$  încît  $B - E - F$ ,  $P \in (AF) \cap (CD)$  și  $p = f^{-1}(P)$ . Evident,  $p < m$ . Pentru orice  $x \in (p, m)$ , semidreapta de origine  $A$  prin  $f(x)$  va tăia  $\beta$  (între  $E$  și  $F$ ) deci  $x \notin K$ , în contradicție cu calitatea de supremum a lui  $m$ .

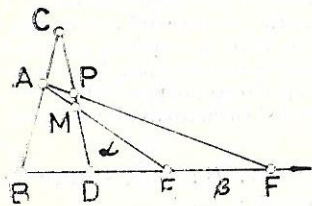


Fig. 48

Dacă  $\gamma$  este semidreaptă interioară unghiului format de  $\alpha$  cu  $[A; B]$ , va tăia  $[BM]$  și conform axiomei lui Pasch va mai tăia  $[BD]$  sau  $[MD]$ . Păstrează interes a doua variantă. Fie  $N \in \gamma \cap [MD]$  și  $n = f^{-1}(N)$ . Deducem  $n > m$  și vom ajunge ca în etapa precedentă să con-

zicem calitatea de supremum a lui  $m$ .

Pentru unicitate se constată ușor că orice superparalelă  $\gamma$  la  $\beta$  va conține punctul  $M$  mai sus considerat.

**Teorema 6.2.** Dacă  $\alpha \uparrow \beta$  și  $\gamma \subset \alpha$  sau  $\alpha \subset \gamma$ , atunci  $\gamma \uparrow \beta$ .

*Demonstrație.* Fie  $\gamma \subset \alpha$  avînd originea  $C$ . Dacă, prin absurd, nu are loc  $\gamma \uparrow \beta$  va exista o semidreaptă  $\delta = [C; D]$  încît  $\delta \uparrow \beta$ . Vom nota provizoriu prin  $\mathcal{J}$  interiorul unghiului format de  $[A; B]$  și  $\alpha$ . Din  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  rezultă ușor  $D \in \mathcal{J}$ . Deoarece  $\alpha$  este superparalelă

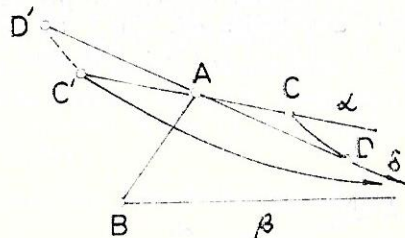


Fig. 49

cu  $\beta$  urmează că  $[A; D]$  taie  $\beta$  într-un punct  $E$  (ce nu mai apare pe figura 49). Deoarece  $[AB]$  nu poate fi tăiat de  $(CD)$  urmează conform axiomei lui Pasch în  $\triangle ABE$  că  $(CD)$  ar tăia  $[BE] \subset \beta$  într-un punct  $P$ , pentru care stabilim cu aceeași axiomă a lui Pasch (aplicată triunghiului  $CPB$ ) că are loc  $C - D - P$ , deci  $P \in \delta$ , absurd.

Demonstrația decurge practic la fel cînd  $\alpha \subset \gamma$ . Acum am contrazice  $\gamma \uparrow \beta$  prin existența unei superparalele  $\delta'$  cu aceeași origine  $C$  ca și  $\gamma$  și am lua  $D'$  pe „prelungirea” lui  $\delta'$  etc.

În virtutea definiției 6.1 este evidentă implicația:

$$(6.1) \quad \alpha \uparrow \beta \wedge (\delta \subset \beta \vee \beta \subset \delta) \Rightarrow \alpha \uparrow \delta.$$

În cele ce urmează ne vom referi la drepte orientate  $(a, [\alpha])$  omițînd însă în notații simbolul  $[\alpha]$  al clasei de semidrepte incluse în  $a$ , echivalente cu  $\alpha$  (echivalența  $\sim$  a fost introdusă în cap. V, § 3). Vom lăsa în grija contextului precizarea orientărilor de fiecare dată cînd va fi necesar; dacă orientarea nu este precizată de context ea este arbitrară dar se păstrează aceeași dacă dreapta subiacentă figurează de mai multe ori în același context. Vom nota cu  $\mathcal{L}$  mulțimea dreptelor orientate.

**Definiția 6.2.** Fie  $a$  și  $b$  două drepte orientate: spunem că  $a$  este *superparalelă* cu  $b$  și notăm  $a \uparrow b$  dacă există semidrepte  $\alpha, \beta$  incluse în  $a$  respectiv  $b$ , pozitiv orientate, încît  $\alpha \uparrow \beta$ . Conform teoremei 6.1 și implicației (6.1), dacă înlocuim  $\alpha$  prin  $\alpha'$  și  $\beta$  prin  $\beta'$  are loc și  $\alpha' \uparrow \beta'$ .

*Observații.* 1° Din  $a = b$  urmează  $a \uparrow b$ . 2° Din  $a \uparrow b$  și  $a \neq b$  urmează conform teoremei 6.2 și implicației (6.1)  $a \cap b = \emptyset$  și prin urmare fiecare din dreptele  $a, b$  este inclusă în cîte un semiplan delimitat de cealaltă.

De obicei în literatura consacrată geometriei hiperbolice se adoptă o terminologie distinctă de aceasta sugerată aici. În [4], vol. III, p. 235, [61], p. 36, [95], p. 135, se folosește termenul de paralelă în loc de superparalelă și se numesc „divergente” drepte (coplanare) nescante. Bolyai a gândit termenul de *asimptolă* și a utilizat notația  $\parallel$  în loc de  $\uparrow$  (vezi [7], p. 81; la Lobacevski și în [29], p. 293, se folosește termenul de *dreaptă limită* iar în [72], p. 301, se introduce exprimarea oarecum analoagă *paralelă critică*.

**Teorema 6.3.** Dacă  $a \uparrow b$  și  $a \neq b$  există o secantă egal înclinată față de  $(a, b)$  adică o dreaptă  $c$  secantă lui  $a, b$  în punctele  $A, B$  încît

$$\text{pentru } A < X \text{ și } B < Y \text{ are loc } \widehat{BAX} = \widehat{ABY}.$$

*Demonstrație.* Fie  $M \in a, N \in b$  și un punct  $V$  pe  $a$  încît  $M < X$ . Bisectoarea unghiului  $VMX$  este interioară acestui unghi deci va tăia  $b$  într-un punct  $P$  (desigur  $N < P$ ). Bisectoarea interioară a unghiului  $PNB$  taie  $[MP]$  într-un punct  $Q$ . Fie  $A, B, C$  proiecțiile ortogonale ale lui  $Q$  pe  $a, b$  și respectiv  $(MN)$ . Din

$$Q \in [M; P] \text{ rezultă } QA \equiv QC \text{ iar din } \widehat{MXQ} = \widehat{QNP}$$

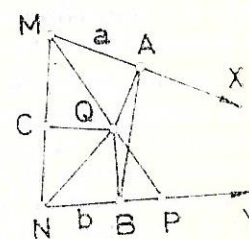


Fig. 50



urmează  $QC \equiv QB$ . Deducem  $QA \equiv QB$ , deci în triunghiul isoscel  $QAB$  are loc  $\widehat{QAB} \equiv \widehat{QBA}$ . Putem presupune că am ales  $X$  încît  $A < X$  și fie  $Y$  încît  $B < Y$ . Constatăm imediat  $\widehat{BAX} \equiv \widehat{ABY}$ , deci  $(AB)$  este secantă „egal înclinată” q.e.d.

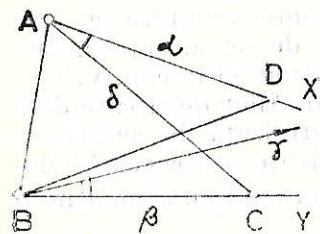


Fig. 51

*Observații.* 1° Teorema nu afirmă că secanta egal înclinată  $(AB)$  ar fi unică și acest fapt nici nu este adevărat; în corolarul 1 al teoremei 7.2 se va demonstra că fiecare dintre punctele  $A, B$  poate fi ales în mod independent.

2° Dacă  $a = b$  concluzia teoremei de mai sus, ușor reformulată, este banală (dar nu falsă), rolul secantelor egal înclinate preluându-l dreptele perpendiculare pe  $a$ .

**Teorema 6.4.** *Relația  $\uparrow$  de superparalelism este simetrică.*

*Demonstrație.* Fie  $a \uparrow b$ . Conform teoremei precedente putem pune în evidență o secantă egal înclinată  $AB$ . Fie  $\alpha = [A; X]$  și  $\beta = [B; Y]$  semidrepte ce precizează orientările dreptelor  $a, b$  ce au fost subînțelese preconizând situația  $a \uparrow b$ . Dacă, prin absurd, nu are loc  $\beta \uparrow \alpha$  va exista o semidreaptă  $\gamma$  de origine  $B$  încît  $\gamma \uparrow \alpha$ . Constatăm ușor  $\gamma \subset \text{Int } ABY$ . Fie o semidreaptă  $\delta$  inclusă în  $(a; B)$  încît  $\alpha, \delta \equiv \beta, \gamma$ .

Se observă imediat  $\delta \subset \text{Int } BAX$  și, conform calității de superparalelă a lui  $\alpha$ , va exista un punct  $C$  comun lui  $\delta$  și  $\beta$ . Considerăm  $D \in (A; X)$  încît  $AD = BC$ . Se constată ușor  $\triangle ABD \equiv \triangle BAC$  (cazul LUL) și urmează  $\gamma = [B; D)$ , în contradicție cu ipoteza  $\gamma \uparrow \alpha$  etc.

**Teorema 6.5.** *Relația  $\uparrow$  de superparalelism este o echivalență în mulțimea  $\overline{\mathcal{L}}$  a dreptelor orientate.*

*Demonstrație.* Reflexivitatea a fost observată imediat după definiția 6.2 iar teorema precedentă a asigurat simetria. A rămas deci de dovedit doar tranzitivitatea.

Să presupunem deci că au loc  $a \uparrow b$  și  $b \uparrow c$ . Pentru început vom adopta și ipoteza suplimentară că  $a, c$  sînt în semiplane distincte delimitate de  $b$ . Fie  $\alpha = [A; X]$  și  $\gamma = [C; Z]$  semidrepte pozitive orientate incluse în  $a$  respectiv  $c$ . Dacă, prin absurd, nu are loc  $\alpha \uparrow \gamma$ , va exista conform teoremei 6.1 o semidreaptă  $\alpha'$  de origine  $A$  încît  $\alpha' \uparrow \gamma$ . Deoarece avea loc  $\alpha \uparrow \beta$  urmează ușor că există un punct  $B$  comun lui  $b$  și lui  $\alpha'$ . Distingem semidreapta  $\beta = [Y; B \leq Y]$  a dreptei  $b$  și semidreapta  $\alpha'' \subset \alpha'$  de origine  $B$ , interioară unghiului

$CBY$ . Urmează  $\beta \uparrow \gamma$  și rezultă că nu poate avea loc  $\alpha'' \uparrow \gamma$ , în contradicție cu ipoteza  $\alpha' \uparrow \gamma$  sau cu teorema 6.2. Contradicția obținută probează că are loc  $\alpha \uparrow \gamma$ , adică  $a \uparrow c$ , ceea ce ne propusesem să dovedim.

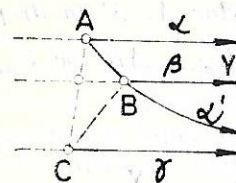


Fig. 52

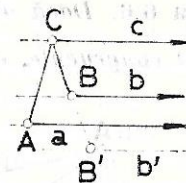


Fig. 53

În continuare vom renunța la ipoteza suplimentară că  $a, c$  sînt „separate” de  $b$  și vom analiza cazul rămas:  $a$  și  $c$  sînt incluse în același semiplan delimitat de  $b$ . Alegem semidrepte „pozitive”  $\alpha, \beta, \gamma$  incluse în  $a, b, c$ ; fie  $A, B, C$  originile lor. Una dintre semidreptele  $[B; A), [B; C)$  va forma cu  $\beta$  un unghi mai mic; să presupunem că prima. Urmează în acest caz că  $[B; A)$  este secantă dreptei  $c$  într-un punct  $C'$ . Înlocuind deci eventual  $C$  prin  $C'$ , putem presupune punctele  $A, B, C$  coliniare și va exista unul dintre acestea care să fie între celelalte. În consecință, din ipotezele adoptate una dintre dreptele date  $a, b, c$  le separă pe celelalte două; fie aceasta  $c$ .

Atragem atenția că această etapă era strict necesară deoarece nu puteam ști *a priori* că dreptele  $a, b, c$  nu se dispun ca în figura 54.

Presupunind acum (prin absurd) că nu are loc  $a \uparrow c$ , am găsi prin  $A$  o altă dreaptă orientată  $a'$  încît  $a' \uparrow c$ . Pentru  $a' \uparrow c$  și  $c \uparrow b$  unde  $c$  separă  $a'$  de  $b$  vom deduce ca în etapa de mai sus  $a' \uparrow b$ . Prin teorema 6.1 urmează însă  $a = a'$  etc.

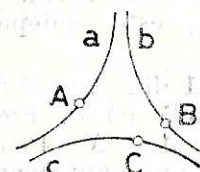


Fig. 54

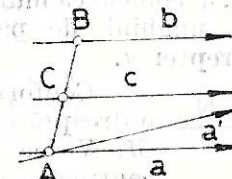


Fig. 55

**Definiția 6.3.** Fie  $a$  o dreaptă orientată și un punct  $A$  neincident ei. Se consideră  $B \in a$  încît  $AB \perp a$  și semidreapta  $\beta \subset a$  de origine  $B$



ce reprezintă orientarea dată pentru  $a$ . Se numește *unghi de paralelism* pentru cuplul  $(a, A)$  numărul real  $\sup_{x \in \beta} \widehat{BAx}$ . Vom nota pentru început acest unghi prin  $U_{a,A}$ ; subînțelegem că măsurăm unghiurile în radiani.

**Teorema 6.6.** *Dacă distanțele punctelor  $A, A'$  la drepte  $a$  respectiv  $a'$  sînt congruente, atunci  $U_{a,A} = U_{a',A'}$ . Are loc  $U_{a,A} \leq \frac{\pi}{2}$ .*

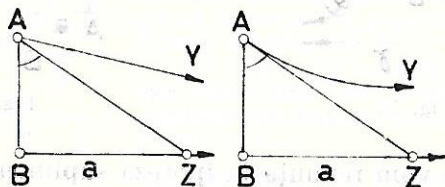


Fig. 56

**Demonstrație.** 1° Fie, prin absurd,  $U_{a',A'} < U_{a,A}$ . Comparînd definițiile 6.1 și 6.3 observăm că o semidreaptă  $[A; Y)$  aflată în semiplanul limitat de  $(AB)$  ce conține punctele diferite de  $B$  ale semi-

dreptei  $\beta$  și satisfăcînd  $\widehat{BAZ} = U_{a,A}$  este superparalelă cu  $a$ . Pentru

o semidreaptă  $[A; Z)$  inclusă în același semiplan încît  $\widehat{BAZ} = U_{a,A}$  urmează astfel că admite un punct comun cu  $a$ ; putem presupune că  $Z$  este acest punct comun. Considerăm  $Z'$  pe  $a'$  încît  $B' < Z'$  și  $B'Z' \equiv BZ$ . Constatăm imediat  $\triangle BAZ = \triangle B'A'Z'$  (cazul LUL)

și urmează  $\widehat{B'A'Z'} = U_{a',A'}$ , absurd etc.

Vom particulariza acest rezultat 1° pentru cazul cînd  $A' = A$  iar drepte  $a, a'$  coincid ca mulțimi dar au orientări distincte. Obținem concluzia că unghiul de paralelism  $U_{a,A}$  este independent de orientarea drepte  $a$ .

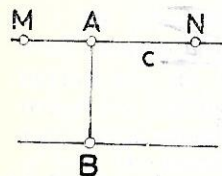


Fig. 57

Conform teoremei 6.1 din capitolul V există o dreaptă  $c$  prin  $A$  paralelă cu  $a$ . Fie punctele  $M, N$  pe  $c$  încît  $M - A - N$ . Pentru a nu contrazice calitatea de supremum pentru  $U_{a,A}$  se

impune să aibă loc  $U_{a,A} \leq \widehat{BAN}$  și  $U_{a,A} \leq \widehat{BAM}$ ; adunînd membru cu membru cele două inegalități deducem și concluzia 2°, q.e.d.

Ca urmare a acestei teoreme unghiul de paralelism  $U_{a,A}$  depinde doar de distanța  $AB$  de la  $A$  la  $a$ ; vom renota  $U_{a,A} = L(AB)$ . Să considerăm mulțimea  $\Sigma^* = \{(A, B); A \neq B\}$  a segmentelor nenule.

Am introdus astfel o funcție  $L: \Sigma^* \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Este ușor de văzut că,

dacă are loc axioma V a paralelelor, funcția  $L$  este constantă și considerarea ei este lipsită de importanță. Genialul matematician rus N. I. Lobacevski a fost primul care a sesizat importanța acestei funcții în geometria hiperbolică; în onoarea sa folosim aici notația  $L$  (în locul celei utilizate mai frecvent în literatura matematică,  $\Pi$ ) și denumirea de *funcție a lui Lobacevski*. Proprietăți importante ale acestei funcții vor fi puse în evidență în acest paragraf dar și în următoarele două.

**Definiția 6.4.** Numim *defect al triunghiului  $ABC$*  numărul real  $\delta(ABC) = \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ , unde  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  sînt mărimile unghiurilor triunghiului  $ABC$  măsurate în radiani.

**Teorema 6.7.** *Defectul unui triunghi este un număr real nenegativ și strict mai mic decît  $\pi$ .*

**Demonstrație.** Afirmația  $\delta(ABC) < \pi$  rezultă direct din definiție. Vom presupune prin absurd că există un triunghi  $ABC$  avînd defectul negativ,  $\delta(ABC) \leq -u$ , unde  $u$  este măsura în radiani a unui unghi. Putem presupune că am notat vîrfurile încît  $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$ . Fie  $\hat{D}$  mijlocul lui  $BC$  și  $E$  simetricul lui  $A$  față de  $D$ . Triunghiurile  $DAC$  și  $DEB$  sînt congruente (cazul LUL) și constatăm ușor  $\delta(ABE) =$

$= \pi - (\widehat{EAB} + \widehat{ABE} + \widehat{BEA}) = \pi - (\widehat{DAB} + \hat{B} + \widehat{CBE} + \widehat{DAC}) =$   
 $= \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = \delta(ABC)$ . Constatăm deci că putem înlocui triunghiul  $ABC$  cu un triunghi  $A_1B_1C_1$  avînd același defect ca și  $ABC$  și unghiul său minim  $A_1$  satisfăcînd inegalitatea  $2A_1 \leq A$ . (Evident  $A_1, B_1, C_1$  pot fi luate  $A, B, E$ ). Iterînd această etapă vom găsi un triunghi  $A_nB_nC_n$ , unde  $2^n \cdot \hat{A}_n \leq \hat{A}$  și  $\delta(A_nB_nC_n) \leq -u$ . Putem presupune că am ales numărul natural  $n$  suficient de mare încît  $\hat{A}_n \leq u$  și inegalitatea  $\delta(A_nB_nC_n) \leq -u$  se explicitează prin  $\hat{B}_n + \hat{C}_n > \pi$  ce ar afirma că unghiul interior  $\hat{B}_n$  este mai mare decît unghiul exterior din  $C_n$ , absurd etc.

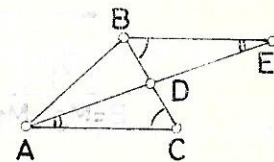


Fig. 58



**Teorema 6.8.** Funcția  $\delta$  satisface următoarele proprietăți „de aditivitate”

- 1°  $B - M - C \Rightarrow \delta(ABM) + \delta(AMC) = \delta(ABO)$ ;
- 2°  $M \in \text{Int } \triangle ABC \Rightarrow \delta(ABM) + \delta(BMC) + \delta(CMA) = \delta(ABC)$ .

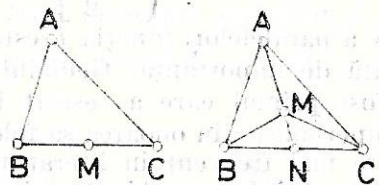


Fig. 59

Demonstrația primei implicații constă în simple explicitări ale defectelor triunghiurilor considerate. Premiza  $M \in \text{Int } \triangle ABC$  trebuie înțeleasă astfel: există  $N \in |BC|$  încît  $M \in |AN|$  și apoi, conform 1°, au loc egalitățile  $\delta(ABM) + \delta(BMC) + \delta(CMA) = \delta(ABM) + \delta(BMN) + \delta(NMC) + \delta(CMA) = \delta(ABN) + \delta(NCA) = \delta(ABO)$ , q.e.d.

**Teorema 6.9.** Fie  $(AB) \perp a$  cu  $B \in a$ . Următoarele trei propoziții matematice sînt echivalente:

- 1° prin  $A$  există cel puțin două paralele distincte la  $a$ ;
- 2° există  $M \in a$  încît  $\delta(ABM) > 0$ ;
- 3°  $L(AB) < \frac{\pi}{2}$ .

*Demonstrație.* Echivalența propozițiilor 1° și 3° a fost deja pusă în evidență; pentru echivalența acestora cu 2° vom adapta o idee a matematicianului Legendre.

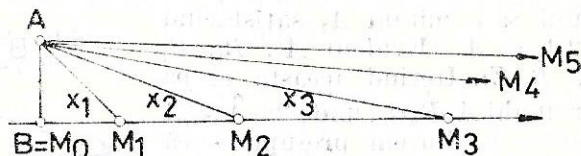


Fig. 60

Vom considera punctele  $M_n$  pe  $a$ , pentru orice număr natural  $n$ , încît  $B = M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n < \dots$  și astfel ca pentru orice  $i \in \mathbb{N}$ ,  $AM_i \equiv M_i M_{i+1}$ . Vom nota cu  $d_n$  defectul triunghiului

$AM_n M_{n+1}$  și fie  $x_n = \widehat{BM_n A}$ . Deoarece triunghiul  $AM_i M_{i+1}$  este isoscel are loc  $M_i AM_{i+1} = x_{i+1}$  și, pentru  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $M_{i+1} M_i A = \pi - x_i$ . Deducem astfel:

$$(*) \quad x_i - 2x_{i+1} = d_i.$$

Sumînd aceste egalități pentru  $i = 1, \dots, n-1$  obținem  $(x_1 - x_n) - (x_2 + x_3 + \dots + x_n) = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ . Folosind și teorema precedentă și sumînd unghiurile din  $A$  oferim acestei egalități forma:

$$(2x_1 - x_n) - \widehat{BAM_n} = \delta(AM_1 M_n).$$

Deoarece notasem defectul triunghiului  $ABM_1$  cu  $d_0$  deducem și  $\frac{\pi}{2} - 2x_1 = d_0$  și egalitatea de mai sus devine  $\frac{\pi}{2} - x_n - \widehat{BAM_n} = \delta(ABM_n)$ , prin urmare

$$(**) \quad \widehat{BAM_n} = \frac{\pi}{2} - \delta(ABM_n) - x_n.$$

Din relația (\*) mai deducem  $2x_{i+1} \leq x_i$ , deci are loc  $0 < x_n \leq 2^{-(n+1)} \cdot \pi$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Șirul de numere reale  $u_n = \delta(ABM_n)$  este monoton nedescrescător și mărginit superior, deci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ . Se constată ușor că, pentru  $n$  tinzînd la infinit, unghiul  $\widehat{BAM_n}$  tinde la unghiul de paralelism  $L(AB)$  și deci din relația (\*\*) obținem:

$$(6.2) \quad L(AB) = \frac{\pi}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(ABM_n)$$

În baza acestei egalități, echivalența propozițiilor 2° și 3° din enunț este imediată.

**Teorema 6.10.** Axioma  $\neg V$  este echivalentă cu următoarele propoziții:

- 1° codomeniul funcției  $L$  a lui Lobacevski conține cel puțin un element  $u < \frac{\pi}{2}$ ;



- 2° există un triunghi dreptunghic  $ABC$  de defect pozitiv;  
 3° orice triunghi dreptunghic  $DEF$  are defectul pozitiv;  
 4° orice triunghi  $MNP$  are defectul pozitiv;  
 5° pentru orice  $x$  din  $\mathbf{R}_+$ ,  $L(x) < \frac{\pi}{2}$ ;

6° oricare ar fi punctul  $Q$  și dreapta  $d$  încît  $Q \notin d$  există prin  $Q$  cel puțin două paralele la dreapta  $d$ .

*Demonstrație.* Axioma  $\neg V$  (vezi paragraful precedent) afirmă că există un punct  $A$  și o dreaptă  $a$  (cu  $A \notin a$  încît există prin  $A$  cel puțin două paralele distincte la dreapta  $a$ ). Fie  $B$  piciorul perpendicularei coborîte din  $A$  pe  $a$ . Conform teoremei precedente afirmația finală din  $\neg V$  este echivalentă cu  $L(AB) < \frac{\pi}{2}$  și respectiv cu existența punctului  $C \in a$  încît  $\delta(ABC) > 0$ . Deci  $\neg V \Leftrightarrow 1^\circ$  și  $\neg V \Leftrightarrow 2^\circ$ .

Considerăm triunghiul  $DEF$  dreptunghic în  $E$ . Presupunem inițial că măcar una dintre catetele sale este mai mare decît cateta omologă a lui  $ABC$ , de exemplu  $EF > BC$  (și  $DE = AB$ ). Considerăm  $G \in EF$  încît  $EG \equiv BC$ , urmează  $\triangle ABC = \triangle DEG$ , deci  $\delta(DEG) = \delta(ABC) > 0$  și  $\delta(DEF) = \delta(DEG) + \delta(DGF) \geq \delta(DEG) > 0$ . Demonstrația decurge analog și cînd  $DE > AB$ .

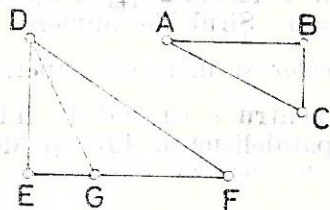


Fig. 61

Continuăm demonstrarea implicației  $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$  păstrînd notațiile dar presupunînd acum  $DE < AB$  (și eventual  $EF < BC$ ). Să presupunem prin absurd  $\delta(DEF) = 0$  și să construim punctul  $H$  încît

$\widehat{FDH} \equiv \widehat{DFE}$  și  $DG \equiv EF$ . Urmează  $\triangle DEF \equiv \triangle FHD$  (cazul

ULU) deci  $DH \perp HF$ ,  $HF \equiv DE$  și  $\widehat{DFH} \equiv \widehat{EDF}$ . Ipoteza adoptată  $\delta(DEF) = 0$ , conduce la  $EF \perp FH$ . Ne vom referi la patrulaterul  $DEFH$  cu denumirea provizorie de dreptunghi (o astfel de denumire

este corectă în geometria euclidiană dar contradictorie în geometria hiperbolică). Așezînd una peste alta copii congruente ale dreptunghiului  $DEFH$  ca în figura 62 vom obține un dreptunghi  $D_nEFH_n$ , numărul  $n$  fiind astfel ales încît  $AB < ED_n$  (vezi axioma  $IV_1$  a lui Arhimede).

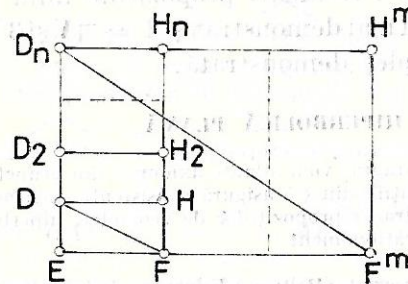


Fig. 62

Pentru eventualitatea  $EF < BC$  vom așeza lateral copii congruente ale dreptunghiului  $D_nEFH_n$  pentru a obține dreptunghiul mai „lat”  $D_nEF^mH^m$  cu  $BC < EF^m$ . (Această „pavare” a planului cu dreptunghiuri este posibilă doar în baza ipotezei că defectul triunghiului  $DEF$  este nul). Trasăm  $D_nF^m$  și obținem triunghiurile congruente (conform cazului LUL sau LLL)  $ED_nF^m$  și  $H^mF^mD_n$ . Suma unghiurilor acestor două triunghiuri este evident  $2\pi$ , deci triunghiul dreptunghic  $D_nEF^m$  are defectul nul. Dar catetele sale respectiv mai mari decît cele ale lui  $ABC$  și în etapa precedentă am demonstrat că defectul lui  $D_nEF^m$  este strict pozitiv. Absurditatea provine din ipoteza  $\delta(DEF) = 0$ , deci  $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ .

Demonstrăm  $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ . Presupunem că virfurile  $M, N, P$  ale triunghiului  $MNP$  sînt notate astfel încît  $\hat{M} \leq \hat{N} \leq \hat{P}$ . În acest caz  $M$  și  $N$  sînt unghiuri ascuțite și piciorul  $Q$  al înălțimii din  $P$  este pe latura  $[MN]$ . Triunghiurile dreptunghice  $PQM$  și  $PQN$  au (conform ipotezei  $3^\circ$ ) defecte pozitive și deci  $\delta(MNP) = \delta(PQM) + \delta(PQN) > 0$ . Am dovedit astfel  $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ , dar implicația inversă este evidentă, deci  $3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$ .

Fie  $DE$  un segment de lungime  $x$  și un punct arbitrar  $F$  pe perpendiculara în  $E$  pe  $(DE)$ . Conform teoremei 6.9, condiția  $\delta(DEF) > 0$  este echivalentă cu  $L(DE) < \frac{\pi}{2}$ , deci  $3^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$ .

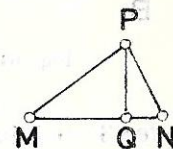


Fig. 63



Nu restringem generalitatea presupunând că, în propoziția 6°, punctul  $Q$  coincide cu  $D$  considerat mai sus și  $d = (EF)$ . Conform aceleiași teoreme 6.9, are loc  $3^\circ \Leftrightarrow 5^\circ \Leftrightarrow 6^\circ$ .

Se observă imediat  $6^\circ \Rightarrow \neg V$ .

Reținem dintre demonstrațiile de mai sus implicațiile rezumate în diagrama alăturată. Evident, propozițiile „din colțuri” sunt echivalente. Am mai demonstrat și  $1^\circ \Leftrightarrow \neg V$  și  $3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$  și teorema este complet demonstrată.

$$\begin{array}{c} \neg V \Leftrightarrow 6^\circ \\ \updownarrow \\ 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \end{array}$$

## § 7. GEOMETRIE HIPERBOLICĂ PLANĂ

În cadrul acestui paragraf vom admite axiomele din grupele I–IV ale lui Hilbert și axioma  $\neg V$ . Considerațiile din § 5 asigură consistența unei astfel de geometrii. Pentru deducerea și demonstrarea propozițiilor de geometrie hiperbolică avem acum două modalități distincte de raționament:

— abstract;

— pe un model precizat (Beltrami-Enneper, Poincaré sau Cayley-Klein).

Pentru moment nu știm dacă sistemul axiomatic adoptat (la care ne vom referi cu simbolul  $\mathcal{H}$ ) este sau nu categoric și nu putem afirma că cele două modalități descrise conduc la aceleași rezultate. Există posibilitatea teoretică de a putea dovedi pe un anumit model anumite propoziții  $P_n$  care să nu fie consecințe logice ale axiomelor din sistemul  $\mathcal{H}$ . În acest caz studiul pe model ar echivala cu dezvoltarea logică nu a sistemului axiomatic  $\mathcal{H}$  ci a unui sistem axiomatic mai amplu  $\mathcal{H} = \mathcal{H} \cup \{P_n\}$ . Acesta este principalul motiv care privilegiază metoda raționamentului abstract față de metoda studiului pe model. Aici însă sistemul axiomatic este categoric și eventualitatea teoretică prezentată mai sus nu se realizează.

Din păcate, demonstrarea categoricității sistemului axiomatic  $\mathcal{H}$  necesită un spațiu mai amplu decât avem aici la dispoziție iar deducerea pe calea raționamentului abstract a unor propoziții importante din geometria hiperbolică este suficient de dificilă și alambicată.

Această stare de fapt ne determină să grupăm în acest paragraf deducerea pe calea raționamentului abstract doar a citorva consecințe și, în următorul paragraf, să folosim și modelul Beltrami-Enneper pentru a obține cât mai expeditiv câteva propoziții centrale de geometrie hiperbolică.

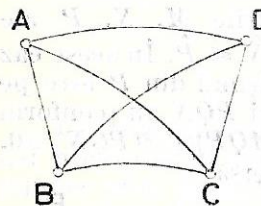


Fig. 64

**Definiția 7.1.** Un patrulater convex  $ABCD$  se numește *patrulater Saccheri* dacă  $AB \perp BC$ ,  $BC \perp CD$  și  $AB \equiv CD$ . Ordinea în care vom prezenta vîrfurile unui patrulater Saccheri nu este complet arbitrară.

**Teorema 7.1.** Dacă  $ABCD$  este patrulater Saccheri, atunci: 1°  $DCBA$  este patrulater Saccheri; 2° diagonalele  $BD$  și  $AC$  sînt congru-

ente; 3° unghiurile  $BAD$  și  $CDA$  sînt congruente și ascuțite; 4°  $\widehat{BDC} \equiv \widehat{CAB} < \widehat{ACD} \equiv \widehat{ABD}$ .

**Demonstrație.** Pentru 1° vom constata că cele trei condiții din definiția 7.1 se îndeplinesc simultan pentru patrulaterul convexe  $ABCD$  și  $DCBA$ . 2° Triunghiurile  $BAC$  și  $CDB$  sînt congruente

(cazul LUL), deci  $AC \equiv BD$ . Reținem de aici și  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CDB}$ . Pentru 3° vom observa (conform cazului LLL)  $\triangle CAD \equiv \triangle BDA$

deci  $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BDA}$ . Urmează  $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CDA}$ . Suma unghiurilor patrulaterului  $ABCD$  este egală cu suma unghiurilor triunghiurilor  $ABD$  și  $BCD$  iar ultima sumă este strict inferioară lui  $2\pi$ . Urmează  $\pi +$

$+2 \cdot \widehat{BAD} < 2\pi$ , deci  $\widehat{BAD} < \frac{\pi}{2}$ . 4° Deoarece defectul triunghiului  $ABC$

este pozitiv deducem  $\widehat{BAC} < \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{ACB} = \widehat{DCB} - \widehat{ACB} = \widehat{DCA}$ .

Urmează imediat șirul de egalități și inegalități din enunț.

**Observații.** Noi nu am demonstrat că dacă două triunghiuri au unghiuri inegale cuprinse între laturi respectiv congruente, atunci laturile opuse unghiurilor inegale satisfac aceeași inegalitate. Dacă am fi demonstrat această propoziție, am fi aplicat-o pentru triunghiurile  $BAC$  și  $DCA$  pentru a deduce din inegalitatea 4° că are loc  $BC < AD$ . Noi vom dovedi această inegalitate în teorema 8.6. Se justifică astfel denumirile de *bază mică* respectiv *bază mare* pentru laturile  $BC$  și  $AD$  ale patrulaterului Saccheri  $ABCD$ .

Se consideră puncte distincte  $O$ ,  $E$  și o dreaptă  $b$ . Vom asocia în cele ce urmează tripletului  $(O, E, b)$  o funcție  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  pe care o vom numi *funcția lui Gauss*. Fie  $f: (OE) \rightarrow \mathbb{R}$  sistemul cartezian de coordonate ce satisface  $f(O)=0$ ,  $f(E)=1$  (vezi teorema 5.1, cap. V). Pentru orice număr real  $x$  există un punct unic  $M$  pe  $(OE)$  încît  $f(x) = M$ . Fie  $M'$  piciorul perpendicularei coborîte din  $M$  pe  $b$  și punctul  $M'' \in [O; E)$  încît  $MM' \equiv OM''$ . Definim funcția  $g$  a lui Gauss prin  $g(x) = f(M'')$ . Există două cazuri particulare cînd funcția  $g$  a lui Gauss se exprimă simplu dar este lipsită de interes; cînd  $(OE)$  coincide cu  $b$ ,  $g$  este funcția identic nulă iar cînd  $OE \perp b$ , există  $k \in \mathbb{R}$  încît  $g(x) = |x + k|$ . În alte cazuri însă funcția lui Gauss se va dovedi foarte importantă pentru edificarea geometriei hiperbolice.

**Definiția 7.2.** Vom spune că dreptele  $a$ ,  $b$  sînt *divergente* dacă nu au puncte comune și nu admit orientări încît să fie super-paralele.

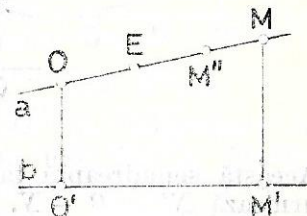


Fig. 65



**Teorema 7.2.** Fie  $O \neq E$  și funcția  $g$  a lui Gauss asociată tripletului  $(O, E, b)$ . Fie  $O'$  proiecția ortogonală a lui  $O$  pe  $b$ . Vom nota cu

$g_+$  restricția lui  $g$  la  $\mathbf{R}_+$ . 1° Dacă  $O = O'$  sau  $O \neq O'$  și  $\widehat{O'DE}$  este obtuz sau drept, atunci  $g_+$  este monoton crescătoare, continuă și nemărginită. 2° Dacă  $O \neq O'$  și  $\widehat{O'O'E} = L(OO')$ , atunci  $g_+$  este monoton descrescătoare la zero și continuă. 3° Dacă  $(OE)$  și  $b$  sînt divergente există  $x_0 \in \mathbf{R}$  încît pentru  $x < x_0$ ,  $g$  este monoton crescătoare și nemărginită și  $\forall u \in \mathbf{R} : g(x_0 - u) = g(x_0 + u)$ .

**Demonstrație.** Vom aborda afirmația 1° în cazul generic  $O \neq O'$ , presupunînd deci  $\widehat{O'O'E} \geq \frac{\pi}{2}$ . Fie numărul real pozitiv arbitrar  $x$ ,  $M = f^{-1}(x)$ , și proiecția ortogonală  $M'$  a lui  $M$  pe  $b$ . Pe  $(M'; M)$  există un punct  $A$  încît  $OO' \equiv M'A$ . Observăm că patrulaterul  $OO'M'A$  este Saccheri, deci  $O'OA$  este ascuțit. Urmează imediat  $M - A - M'$ .

Considerăm apoi  $c$  arbitrar din  $\mathbf{R}_+$  și fie  $N = f^{-1}(x + c)$ . Mai notăm cu  $N'$  proiecția ortogonală a lui  $N$  pe  $b$ . Există  $B \in (N'; N)$  încît  $N'B \equiv MM'$ . În patrulaterul Saccheri  $MM'N'B$  rezultă

$\widehat{M'MB} < \frac{\pi}{2}$ . Mai constatăm că  $\widehat{M'MN}$ , ca unghi exterior triunghiului

lui  $OAM$ , este mai mare decît unghiul obtuz  $\widehat{OAM} = \pi - \widehat{OAM'}$ .

Deci  $\widehat{M'MN}$  este obtuz, și  $(M; B)$  este semidreaptă interioară lui.

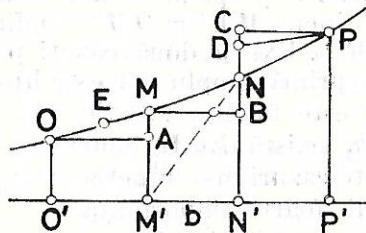


Fig. 66

Această semidreaptă taie deci  $|M'N|$ . Conform axiomei lui Pasch urmează  $N' - B - N$ , deci  $N'B < N'N$ , adică  $g(x) = MM' < NN' = g(x + c)$ . Arbitrarietatea numerelor reale pozitive  $x$  și  $c$  asigură că restricția lui  $g$  la  $\mathbf{R}_+$  este monoton crescătoare.

În triunghiul  $MBN$  latura  $MN$  opusă unui unghi obtuz este cea mai lungă, deci  $NB < MN$ . Deducem de aici  $g(x + c) - g(x) < c$ , inegalitate ce asigură continuitatea funcției  $g$  pe  $\mathbf{R}_+$ .

Fie  $P = f^{-1}(x + 2c)$  și proiecția sa ortogonală pe  $b$ . Considerăm punctele  $C, D$  definite în modul următor :

$$C \in (N'; N) \wedge N'C \equiv P'P, B - N - D \text{ și } BN \equiv ND.$$

Triunghiurile  $MBN$  și  $PDC$  sînt congruente (cazul LUL) deci  $\widehat{NDP} \equiv \widehat{NBM} = \pi - \widehat{MBN} > \frac{\pi}{2}$ . Deci  $\widehat{NDP}$  este obtuz. Din patrulaterul

Saccheri  $CN'P'P$  urmează că  $N'CP$  este unghi ascuțit. Pentru a nu fi contrazisă teorema unghiului exterior se impune deci să aibă loc  $N - D - C$ , adică  $NB \equiv ND < NC$ . Am constatat astfel :  $g(x + c) - g(x) < g(x + 2c) - g(x + c)$ . Prin inducție după numărul natural  $n \neq 0$  constatăm că are loc  $g(x + nc) - g(x) > (n - 1)[g(x + c) - g(x)]$ . Această inegalitate asigură nemărginirea funcției  $g$  pe  $\mathbf{R}_+$  și afirmația 1° este complet demonstrată în cazul  $O \neq O'$ .

Fie  $O = O'$ . Dacă  $OE \perp b$  afirmația 1° rezultă din observația ce a precedat teorema ; vom presupune că  $OE$  nu este perpendiculară

pe  $b$ . Fie  $E'$  proiecția ortogonală a lui  $E$  pe  $b$ . Evident,  $\widehat{EO'E'}$  este ascuțit. Pentru  $q$  arbitrar în  $(0, 1)$  fie  $Q = f^{-1}(q)$  și proiecția sa orto-

gonală  $Q'$  pe  $b$ .  $\widehat{Q'QE}$  este evident obtuz, ca unghi exterior triunghiului dreptunghic  $Q'OQ$ . Conform demonstrației date mai sus în cazul generic, pentru  $x > q$  funcția  $g$  a lui Gauss satisface concluziile enunțate. Datorită arbitrarietății lui  $q$  rezultă afirmația 1°.

2° Ipoteza  $\widehat{O'O'E} = L(OO')$  exprimă că pentru sensuri alese în mod natural pe  $(OE)$  respectiv  $b$ , are loc  $OE \uparrow b$ . Alegînd  $r$  arbitrar în  $\mathbf{R}_+$ , punînd în evidență  $R = f^{-1}(r)$  și proiecția

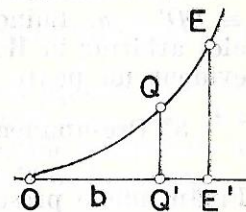


Fig. 67

sa ortogonală  $R'$  pe  $b$ , vom constata că  $\widehat{ORR'}$  (ca supliment de unghi de paralelism) este obtuz (vezi figura 68). Fie  $g_r$  funcția Gauss asociată tripletului  $(R, O, b)$  interpretînd pentru  $g$  afirmația 1° referitoare la  $g_r$ , ne asigurăm că  $g_+$  este monoton descrescătoare și continuă (pentru valori  $x < r$ , dar libertatea de alegere a lui  $r$  anulează



necesitatea acestei precauții suplimentare). A rămas astfel de dovedit doar că  $g_+$  descresce la zero. Pentru  $y$  arbitrar în  $\mathbf{R}_+$  dar presupunem mai mic decât  $g(O)$  vom găsi  $D \in |OO'|$  încît  $O'D = y$ . Fie  $d$  superparalela prin  $D$  la  $OE$  (orientată încît  $O < E$ ). Evident,  $d$  va fi superparalelă cu  $b$

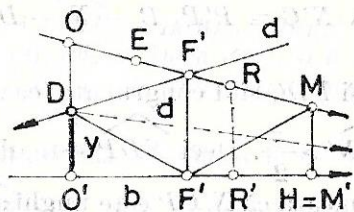


Fig. 68

(cu orientarea  $\omega$  în care  $O'$  precede punctele  $R'$ ). Alegînd pe  $b$  orientarea opusă,  $-\omega$ , vom determina o altă superparalelă la  $b$  ce va tăia ( $OE$ ) într-un punct  $F$ . Considerăm  $M$  încît  $O - F - M$ ,  $FM \equiv FD$  și fie  $F'$  piciorul perpendicularei coborîte din  $E$  pe  $b$ . Fie  $H$  simetricul punctului  $O'$  față de  $F'$ . Unghiurile  $F'FD$  și  $F'FM$  sînt congruente ca unghiuri de paralelism. Prin cazul LUL deducem  $F'D \equiv F'M$  și  $\widehat{DF'F} \equiv \widehat{MF'F}$ . Urmează apoi (conform aceluiași caz LUL de congruență a triunghiurilor)  $\widehat{MHF'} \equiv \widehat{DOF'} = \frac{\pi}{2}$ . Deci punctul considerat  $H$  coincide cu proiecția ortogonală  $M'$  a lui  $M$  pe  $b$  și  $MM' \equiv DO' = y$ . Luînd  $x = f(M) > 0$ , vom avea  $g(x) = y$ . Dar  $y$  era ales arbitrar în  $\mathbf{R}_+$  deci  $g_+$  ia valori oricît de apropiate de zero (și evident nu poate lua valori negative).

3° Presupunem că sîntem într-un caz generic cînd  $\widehat{O'OE} \neq \frac{\pi}{2}$ .

Fixăm ideile presupunînd  $\widehat{O'OE} < \frac{\pi}{2}$ . Alegem pe  $b$  orientarea de la  $O'$  spre  $E'$  ( $EE' \perp b$ ). Fie  $c$  dreapta prin  $O$  superparalelă cu  $b$ . Punctele  $M$  ale semidreptei  $(O; E)$  și punctele  $M' \in b$  sînt evident separate de dreapta  $c$ ; vom presupune  $f(M) = m$  și  $MM' \perp b$ . Există deci  $M_1 \in |MM'| \cap c$ . Considerăm proiecția ortogonală  $M_2$  a lui  $M$  pe  $c$ . Constatăm ușor  $g(m) = MM' > MM_1 > MM_2 = g_c(m)$ , unde am notat prin  $g_c$  funcția Gauss asociată tripletului  $(O, E, c)$ . Dar conform 1°,  $g_c(x)$  este nemărginită (pentru  $x \in \mathbf{R}_+$ ), deci și  $g_+(x)$

este nemărginită. Reținem din această etapă că există  $m \in \mathbf{R}_+$  încît  $g(m) > OO' = g(O)$ .

Fie acum  $E_1$  încît  $E - O - E_1$  și  $g_1$  funcția Gauss asociată tripletului  $(O, E_1, b)$ . Conform 1° există numărul real  $n > 0$  încît  $g_1(n) =$

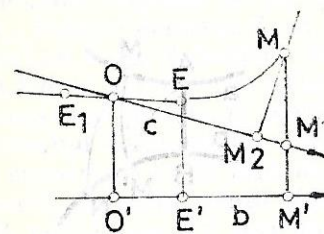


Fig. 69

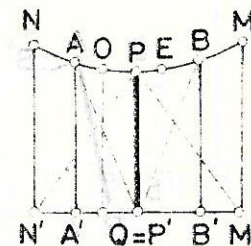


Fig. 70

$= g(m)$ , deci un punct  $N$  încît  $NN' \equiv MM'$ . Continuarea raționamentului este ilustrată de figura 70.

Evident,  $NN'M'M$  este patrulater Saccheri. Fie  $P, Q$  mijloacele bazelor  $NM$  și  $N'M'$ . Triunghiurile  $NN'P$  și  $MM'P$  sînt congruente (LUL) deci  $N'P \equiv PM'$  și încă  $\widehat{NPN'} \equiv \widehat{MPM'}$ . În triunghiul isoscel  $PN'M'$  mediana  $|PQ|$  este și înălțime (deci  $Q$  coincide cu proiecția

ortogonală  $P$  a lui  $P$  pe  $b$ ) și bisectoare, deci  $\widehat{N'PP'} \equiv \widehat{P'PM'}$ . Sumînd această congruență de unghiuri cu cea evidențiată anterior deducem  $\widehat{NPP'} \equiv \widehat{P'PM} = \frac{\pi}{2}$ , deci  $P'P \perp OE$ . (Datorită importanței sale intrinseci vom reformula acest rezultat intermediar în corolarul 2.)

Fie  $P = f(x_0)$ . Pentru numărul real arbitrar (pozitiv)  $u$  vom determina punctele  $A, B$  încît  $f(A) = x_0 - u$ ,  $f(B) = x_0 + u$ . Evident,  $P$  va fi mijlocul lui  $AB$ . Fie  $A', B'$  proiecțiile ortogonale ale lui  $A, B$  pe  $b$ . Folosind triunghiurile  $PAP'$  și  $PBP'$  deducem  $AP' \equiv BP'$  și  $\widehat{AP'P} \equiv \widehat{BP'P}$ . Urmează congruența unghiurilor complementare  $AP'A'$  și  $BP'B'$  și apoi, conform cazului LUL,  $AA' \equiv BB'$ , deci  $g(x_0 - u) = g(x_0 + u)$ .

Considerasem inițial  $\widehat{O'OE} \neq \frac{\pi}{2}$ . Dacă  $O'O \perp DE$  am fi luat direct

$P = O$  reluînd doar ultimul aliniat al demonstrației. Partea de concluzie referitoare la monotonia funcției  $g$  (pentru  $x < x_0$  și pentru



$x > x_0$ ) se obține ca la 1° substituind punctul  $O$  prin  $P$ . Demonstrația este astfel încheiată.

**Corolarul 1.** Dacă  $a \uparrow b$ , prin orice punct  $A \in a$  trece o secantă egal înclinată  $(AB)$  față de  $(a, b)$ .

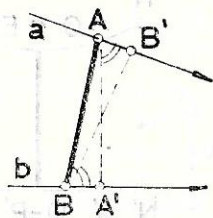


Fig. 71

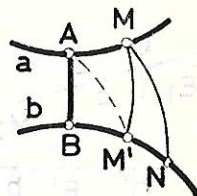


Fig. 72

Într-adevăr, fie  $AA' \perp b$  cu  $A' \in b$ . Conform afirmației 2° din teoremă există un punct unic  $B \in b$  a cărui distanță  $BB'$  la  $a$  să fie cît  $AA'$ . Se constată că triunghiurile dreptunghice  $A'BA$  și  $B'AB$  sînt congruente deci  $\widehat{A'AB} \equiv \widehat{B'BA}$ . Mai observăm  $\widehat{A'AB'} = \widehat{B'BA'} = L(AA') = L(BB') = \widehat{B'BA'}$  etc.

**Corolarul 2.** Orice două drepte divergente  $a, b$  admit o perpendiculară comună  $|AB|$  cu  $A \in a, B \in b$ . Dacă  $d$  este o distanță în planul hiperbolic și se consideră puncte variabile  $M \in a, N \in b$ , atunci  $d(M, N) \geq d(A, B)$ , egalitatea realizîndu-se doar cînd  $M = A, N = B$ .

Într-adevăr, o perpendiculară comună  $|AB|$  a fost pusă în evidență (cu notația  $|PP'|$ ) în demonstrarea afirmației 3°. Fixînd  $M$  arbitrar pe  $a$ , distanța  $d(M, N)$  este minimă cînd  $N$  coincide cu proiecția ortogonală  $M'$  a lui  $M$  pe  $b$ . Concepem  $d(M, N')$  drept o funcție Gauss ce va admite un minim unic cînd  $M = A$  (și deci  $N = M' = B$ ). Dacă, prin absurd, în afara perpendicularei comune considerate ar mai exista una,  $|MM'|$ , patrulaterul  $ABM'M$  ar avea suma unghiurilor  $2\pi$  și o diagonală  $AM'$  l-ar desface în două triunghiuri de defect nul, absurd.

**Observație.** Acest corolar 2 admite și o reciprocă ce constituie de fapt reformularea teoremei 6.1 din capitolul V: dacă două drepte  $a, b$  admit o perpendiculară comună sînt divergente.

**Teorema 7.3.** Pentru orice unghi ascuțit  $XOY$  există o semidreaptă unică  $\mu$  perpendiculară pe  $OX$  și superparalelă cu  $[O; Y)$ .

**Demonstrație.** Fie  $A \in (O; Y)$  și proiecția sa ortogonală  $B$  pe  $OX$ . Considerăm simetricul  $B_1$  al lui  $O$  față de  $B$ . Defectul triunghiului  $OAB$  este un număr strict pozitiv  $d$  (teorema 6.10, afirmația 3°). Triunghiul  $ABB_1$ , congruent cu  $ABO$  va avea desigur același defect  $d$ . Să presupunem că perpendiculara ridicată în  $B_1$  pe  $OX$  taie  $OY$  în  $A_1$ . Pentru defectul  $d_1$  al triunghiului  $ABC$ , egal cu suma defectelor triunghiurilor  $ABO, ABB_1$  și  $AA_1B_1$  vom avea deci  $d_1 > 2d$ . Putem considera puncte  $B_n$  pentru orice  $n$  din  $\mathbb{N}^*$ , continuînd definirea lor recursivă prin:  $B_n$  este simetricul lui  $O$  față de  $B_{n-1}$ . Dacă, prin absurd, perpendiculara ridicată în orice punct  $B_n$  pe  $OX$  taie  $OY$  într-un punct notat  $A_n$ , constatăm că defectul  $d_n$  al triunghiului  $OA_nB_n$  depășește  $2^n \cdot d$ . Această supoziție este însă absurdă deoarece pentru  $n$  suficient de mare ar urma  $d_n > \pi$ , adică suma unghiurilor triunghiului  $OA_nB_n$  ar fi negativă.

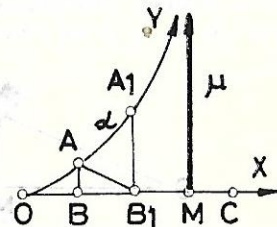


Fig. 73

Reținem din această etapă de demonstrație că există puncte  $C$  pe  $OX$  încît perpendiculara în  $C$  pe  $OX$  să nu taie  $OY$ . Cu ajutorul axiomei lui Pasch, prin reducere la absurd, se observă, că dacă  $C$  are proprietatea menționată și  $O - C - C'$ , atunci și  $C'$  are această proprietate.

Fie sistemul cartezian de coordonate,  $f: (OX) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f(O) = 0, f(B) = 1$ . Mulțimea  $\mathbf{P}$  a punctelor  $Z \in (O; X)$  cu proprietatea că perpendiculara în  $Z$  pe  $OX$  taie  $OY$  este aplicată de  $f$  într-o submulțime  $\mathbf{P}'$  a lui  $\mathbb{R}_+$ , mărginită superior de valori  $f(C)$  pentru puncte  $C$  a căror existență a fost deja stabilită. Există deci  $m = \sup \mathbf{P}'$ ; fie  $M = f^{-1}(m)$  și  $\mu$  semidreapta de origine  $M$ , perpendiculară pe  $OX$  de acea parte a lui  $OX$  de care este  $Y$ .

Afirmăm că  $\mu$  este superparalelă cu  $OY$ . Într-adevăr, dacă  $\mu$  ar tăia  $OY$  în  $N$  am considera  $T$  încît  $O - N - T$ . Proiecția ortogonală  $T'$  a lui  $T$  pe  $OX$  ar fi în  $\mathbf{P}$ , deci  $t = f(T') \in \mathbf{P}'$ . Ar avea însă loc  $m < t$  în contradicție cu calitatea lui  $m$  de majorant al mulțimii  $\mathbf{P}'$ .

Dacă superparalela prin  $M$  la  $[O; Y)$  ar fi distinctă de  $\mu$  ar

conține un punct  $U \in \text{Int } \widehat{OMN}$ . Fie  $UU' \perp OX$  cu  $U' \in OX$ . Dar  $(OY)$  nu poate tăia segmentul  $|UU'|$  fiindcă ar fi obligată prin axioma lui Pasch să taie și  $|MU|$ . Pe  $OY$  nu pot exista nici puncte  $V$  încît  $U' - U - V$  deoarece aceste puncte  $V$  sînt de cealaltă parte a lui  $(MU)$  de care sînt punctele drepte  $OY$ . În consecință, numărul



real  $u = f(U')$  este un majorant pentru  $\mathbf{P}'$  și inegalitatea evidentă  $u < m$  ar contrazice calitatea lui  $m$  de majorant *minim* pentru  $\mathbf{P}'$ . Existența superparalelei  $\mu$  a fost dovedită. Unicitatea ei revine la unicitatea lui  $M$  care se probează ușor prin reducere la absurd.

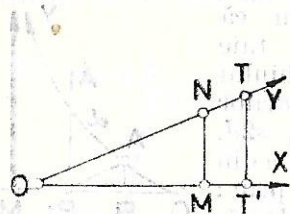


Fig. 74

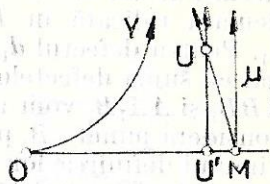


Fig. 75

Nu apar dificultăți principale pentru a adapta demonstrația de mai sus spre a dovedi:

**Teorema 7.4.** Oricare ar fi dreptele neperpendiculare  $a, b$ , există exact două perpendiculare  $c_1, c_2$  pe  $a$  încît orientîndu-le convenabil pe fiecare dintre ele să existe orientări pe  $b$  încît  $c_i \uparrow b$  ( $i=1, 2$ ).

**Teorema 7.5.** Dacă  $a, b$  sînt drepte secante în  $O$ , pentru oricare dintre cele patru modalități de alegere de orientări pe  $a$  și pe  $b$ , există o dreaptă unică  $c_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) pe care se pot lua orientări convenabile înct  $c_i \uparrow a$  respectiv  $c_i \uparrow b$ .

*Demonstrație.* Fie  $\alpha \subset a$  și  $\beta \subset b$  semidrepte de origini  $O$  ce precizează alegerile de orientări pe  $a$  respectiv  $b$ . Fie  $\gamma$  bisectoarea lui  $\widehat{\alpha, \beta}$ . Conform teoremei 7.3, există un punct  $M \in \gamma$  încît perpendiculara ridicată în  $M$  pe  $\gamma$  (privită ca semidreaptă  $\sigma$  aflată de aceea parte a lui  $(OM)$  de care este  $\alpha$ ) să fie superparalelă cu  $\alpha$ . Din motive de „simetrie” se constată că „prelungirea”  $\sigma'$  a acestei semidrepte este superparalelă cu  $\beta$ . Reuniunea semidreptelor  $\sigma$  și  $\sigma'$  este una dintre superparalele comune  $c_i$  din enunț.

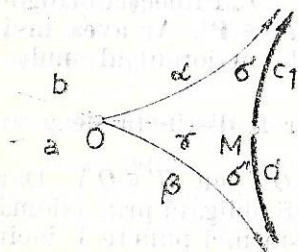


Fig. 76

Pentru a constata că  $c_1 = \sigma \cup \sigma'$  este singura superparalelă comună cu  $\alpha$  și  $\beta$  folosim aceeași figură 76 ca mai sus dar presupusă realizată în altă ordine ce o prezentăm aici. Fie  $\bar{d}$  (ilustrată de  $c_1$ ) presupusă superparalelă cu  $\alpha$  și  $\beta$ . Fie  $M$  proiecția ortogonală a lui  $O$  pe  $\bar{d}$ ; notăm  $\gamma = [O; M]$ . Situațiile de superparalelism

impun  $\widehat{\alpha}, \gamma = L(OM) = \widehat{\gamma}, \beta$  deci  $\gamma$  este bisectoarea (interioară a) lui  $\alpha, \beta$ . Pe  $\gamma$ , punctul  $M$  în care se poate ridica o perpendiculară superparalelă cu  $\alpha$  este unic. Rezultă astfel imediat  $d = c_1$ , q.e.d.

**Teorema 7.6.** *Dacă  $d_1, d_2$  sînt drepte divergente, pentru oricare dintre cele patru modalități de alegere de orientări pe  $d_1$  și pe  $d_2$ , există*

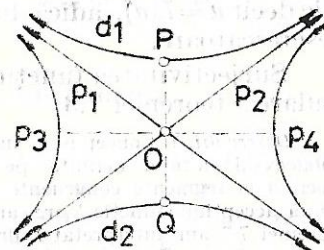


Fig. 77

cîte o dreaptă  $p_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) pe care se pot lua orientări convenabile  
încît  $p_i \uparrow d_1$  respectiv  $p_i \uparrow d_2$ .

Raționamentul demonstrativ este ilustrat de figura 77. Fie  $|PQ|$  perpendiculara comună dreptelor  $d_1$  și mijlocul ei,  $O$ . Prin  $O$  există două superparalele la  $a$  ce le notăm cu  $p_1, p_2$ . Atragem atenția că relațiile  $p_1 \uparrow d_1$  și  $p_2 \uparrow d_1$  subînțeleg alegeri de orientări opuse pe  $d_1$ . Din  $L(OP) = L(OQ)$ , folosind unghiuri opuse la vîrf, stabilim că (după schimbarea orientărilor pe dreptele  $p_i$ ) au loc  $p_i \uparrow d_2$  (cu  $i = 1, 2$  dar subînțelegînd în cele două cazuri alegeri distincte de orientări pe  $d_2$ ). Aplicînd teorema precedentă pentru  $(p_1, p_2)$  în loc de  $(a, b)$  vor exista patru drepte  $c_i$  superparalele cu  $p_1, p_2$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Două dintre acestea, să spunem  $c_1, c_2$ , coincid cu  $d_1$  respectiv  $d_2$  iar celelalte două vor fi notate prin  $p_3, p_4$  pentru a obține chiar notația din enunț; se folosește și tranzitivitatea relației de superparalelism.

**Teorema 7.7.** *Funcția  $L$  a lui Lobacovski,  $L: \mathbb{R}_+ \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,*

este monoton descrescătoare și surjectivă.

*Demonstrație.* Fie  $XOY$  un unghi drept și un sistem cartezian de coordonate  $f: (OY) \rightarrow \mathbb{R}$  încît  $f(O) = 0$  și  $f(Y) > 0$ . Fie numere reale pozitive  $a, b$  încît  $a < b$ . Considerăm pe  $(O; Y)$  punctele  $A = f^{-1}(a)$  și  $B = f^{-1}(b)$ . Fie  $u = L(x)$  și semidreapta  $[A; Z)$  încît  $\widehat{OAZ} = u$ . Desigur,  $[A; Z)$  este superparalelă cu  $OX$ . Fie și



$U \in \text{Int } \widehat{XOY}$  încît  $\widehat{OBU} = u$ . Punctele drepte  $BU$  sînt de acea parte a lui  $(AZ)$  de care nu este  $O$  (și nici un alt punct al dreptei  $OX$ ). Deducem  $BU \cap OX = \emptyset$ . Prin urmare, superparalela  $[B; V)$  la  $[O; X)$  este interioară unghiului  $\widehat{OBU}$ . Deducem

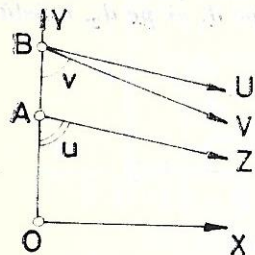


Fig. 78

că unghiul  $v = L(b) = \widehat{OBV}$  este strict mai mic decît  $u = L(a)$ , adică funcția  $L$  este monoton descrescătoare.

Surjectivitatea funcției  $L$  constituie o reformulare a teoremei 7.3.

*Observații.* 1° Concepușem inițial (în § 6) funcția  $L$  a lui Lobacevski ca fiind definită pe mulțimea segmentelor și asociind la segmente congruente aceeași valoare. În acea primă accepțiune funcția  $L$  are caracter geometric. În enunțul teoremei 7.7 am interpretat  $L$  drept funcție definită pe  $\mathbf{R}_+$ ;

o renotăm prin  $\tilde{L}$  pentru a o putea analiza comparativ cu funcția  $L$  inițială, fără pericol de confuzii. După cum am constatat, prezența unui sistem cartezian de coordonate  $f: (OY) \rightarrow \mathbf{R}$  permite să considerăm  $\tilde{L}$ , funcție definită pe  $\mathbf{R}_+$  conform schemei următoare: numărului real  $a$  îi asociem un punct  $A = f^{-1}(a) \in [O; Y)$ , punctului  $A$  îi asociem segmentul  $OA$  și în final conchidem  $\tilde{L}(a) = L(OA)$ . În acest fel, pornind însă de la un alt sistem de coordonate,  $g: (OY) \rightarrow \mathbf{R}$ , vom obține o altă funcție  $\tilde{L}$  unde, evident,  $\tilde{L} \circ f = \tilde{L} \circ g$ . Deoarece sistemele carteziene  $f$  și  $g$  considerate satisfac  $f(0) = g(0) = 0$  precizarea lor se poate realiza prin fixarea unor puncte unitate. Constatăm ușor că aceasta revine la alegerea unei constante  $k$  în  $\mathbf{R}_+$  și urmează  $\tilde{L}(x) = \tilde{L}(kx)$ . Reținem astfel că funcțiile  $\tilde{L}$  nu au caracter geometric (sau nu îl au încă).

2° În geometria absolută putem alege în mod arbitrar un segment nenul  $OE$  care să servească drept unitate de măsură a segmentelor (teorema 5.2, cap. V). Afirmatia rămîne valabilă cînd specializăm geometria absolută în geometria euclidiană. În geometria hiperbolică însă, folosind de exemplu funcția  $L$  putem determina (pînă la o congruență) un segment  $OE$  încît  $L(OE) = \frac{\pi}{4}$ . Avem astfel un procedeu canonic de alegere

a unui etalon  $OE$  pentru măsurarea lungimilor în cadrul geometriei hiperbolice. Gauss cunoștea acest fapt în 1824, după cum rezultă dintr-o scrisoare a sa către Taurinus.

3° Proprietățile menționate în enunțul teoremei 7.7 pentru funcția  $L$  asigură și continuitatea acestei funcții. Expresia analitică a funcției  $L$  va apărea în paragraful următor.

4° Să reținem faptul că pentru valori mici ale distanței  $a$ , funcția  $L$  are valori apropiate de  $\frac{\pi}{2}$ . Să presupunem că spațiul fizic în care trăim ar fi omogen și am dori să

stabilim experimental dacă este îndeplinită sau nu axioma V a paralelelor, prin măsurarea unui unghi de paralelism. Dacă etalonul pentru măsurarea lungimilor ar fi de exemplu „anul lumină” (deci aproximativ  $10^{16}$  metri) unghiul de paralelism pentru o distanță de cîțiva centimetri din caiet ar diferi atît de puțin în geometria hiperbolică de unghiul drept din geometria euclidiană încît nu ar exista aparatura pentru a realiza o măsurare cu o toleranță suficient de mică. Geometrul german Schweikart a sesizat în 1818 (într-un scurt memoriu) că în afara geometriei euclidiene există o geometrie „astrală” în care

defectul triunghiurilor este pozitiv, variabil și are loc teorema 7.3 (folosind alte formulări). Probabil că este primul document în care se afirmă existența unei geometrii neeuclidiene.

În privința spațiului fizic în care trăim lucrurile sînt însă ceva mai complicate deoarece în virtutea teoriei relativității generalizate a lui Einstein acest spațiu nu este omogen, admite în puncte diferite „curburi” diferite (dependente de modul de dispunere a materiei). Conceptul geometric propriu descrierii unui astfel de univers este cel de *varietate diferențiabilă* (riemanniană sau pseudoriemanniană). Acest fapt nu subminează rolul geometriei euclidiene care se dovedește a fi o aproximare simplă foarte bună pentru realitatea obiectivă și, în plus, permite ca în cadrul ei să fie edificate și alte geometrii: hiperbolice (ca în modelele preconizate aici) sau eliptice.

## § 8. TRIGONOMETRIE HIPERBOLICĂ

Așa cum am arătat la începutul paragrafului precedent ne vom folosi în continuare de modelul Beltrami-Enneper pentru a deduce cîteva rezultate puternice de geometrie hiperbolică. Pentru formularea acestor rezultate se vor dovedi utile funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, funcția exponențială și inversa ei „logaritm natural” dar și următoarele două funcții hiperbolice:

$$- \text{cosinus hiperbolic, } \text{ch} : \mathbf{R} \rightarrow [1, \infty), \text{ unde } \text{ch } x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \text{ și}$$

$$- \text{sinus hiperbolic, } \text{sh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ unde } \text{sh } x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

Se demonstrează fără dificultăți următoarele formule analoge celor din trigonometria elementară:

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \text{ch}(x \pm y) &= \text{ch } x \cdot \text{ch } y \pm \text{sh } x \cdot \text{sh } y \text{ și} \\ \text{sh}(x \pm y) &= \text{sh } x \cdot \text{ch } y \pm \text{ch } x \cdot \text{sh } y, \end{aligned}$$

(de fiecare dată semnele din cei doi membri coincidînd);

$$(8.2) \quad \text{ch}(-x) = \text{ch } x, \text{ sh}(-x) = -\text{sh } x;$$

$$(8.3) \quad \begin{aligned} 0 < x < y &\Rightarrow \text{ch } x < \text{ch } y, \\ x < y &\Rightarrow \text{sh } x < \text{sh } y. \end{aligned}$$

În § 5 am considerat și funcția „distanță hiperbolică”  $d_h : S^2 \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ . Aici este util să considerăm o distanță un pic mai generală: pentru un număr real pozitiv arbitrar  $k$  vom considera funcția  $d : S^2 \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ , unde  $d(A, B) = \frac{1}{k} \cdot d_h(A, B)$ ; în fond,



precizarea acestei constante  $k$  revine la fixarea unui etalon  $OE$  pentru măsurarea lungimilor (cu condiția  $d(O, E) = 1$ ).

**Teorema 8.1.** *Funcția  $L$  a lui Lobacevski admite următoarea exprimare analitică:  $L(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-kx}$ .*

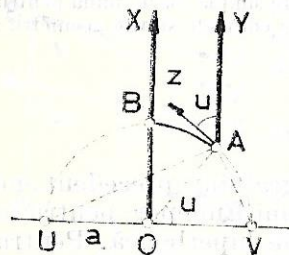


Fig. 79

*Demonstrație.* Fie  $d$  o dreaptă orientată figurată pe model de o semidreaptă euclidiană deschisă  $(O; X)$ , unde bineînțeles  $O$  este pe absolutul  $a$ . Fie  $A$  un  $h$ -punct încît  $[O; A]$  face cu  $a$  un unghi ascuțit  $u$ . Superparalela prin  $A$  la  $d$  va fi o semidreaptă euclidiană  $[A; Y)$ . Perpendiculara din  $A$  pe  $d$  este figurată de un semicerc de centru  $O$  ce conține  $A$ , limitat de punctele  $U, V$ . Pentru distanța hiperbolică vom constata ușor:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \frac{1}{k} \cdot d_h(A, B) = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{AU}{AV} = \frac{1}{k} \left| \ln \left[ \left( 2OA \sin \frac{\pi - u}{2} \right) : \right. \right. \\ &\quad \left. \left. : \left( 2OA \sin \frac{u}{2} \right) \right] \right| = \frac{1}{k} \left| \ln \operatorname{ctg} \frac{u}{2} \right| = -\frac{1}{k} \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

Unghiul de paralelism  $L(AB)$  este deci  $\widehat{ZAY}$ , unde  $[A; Z)$  este tangenta în  $A$  la  $AB$ . Obținem imediat  $\widehat{ZAY} = u$ . Conform formulelor de mai sus egalitatea  $x = d(A, B)$  revine la  $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = e^{-kx}$ , deci  $u = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{-kx}$ , q.e.d.

*Observații.* 1° O dată stabilită (pe model) forma funcției  $L$  ne putem preocupa de punerea în evidență a unor proprietăți care să permită identificarea ei pe calea raționamentului abstract. Oferim pe această cale modelului rolul pe care îl joacă adesea geometria analitică vizavi de cea sintetică. Putem constata ușor  $L'(x) = \frac{-k}{\operatorname{ch} \cdot kx}$ . Putem edifica pe cale abstractă această formulă pornind de la figura 78 căreia să-i asociem o funcție  $t: [0, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $t(A) = \lim_{B \rightarrow A} \frac{AB}{\sin \widehat{VBU}}$  (arătînd desigur că o astfel de limită există). Studiind apoi proprietățile funcției  $t$  ar fi de dovedit  $t(x) = \operatorname{ch} kx$ , ce va necesita la rîndul ei noi artificii!

2° Formula stabilită permite să concretizăm concluzia din observația 4° din finalul paragrafului precedent. Alegerile preconizate acolo,  $k = 10^{-16}$ ,  $x = 10^{-1}$  conduc la o valoare a  $a$  unghiului de paralelism corespunzător, unde  $\frac{\pi}{2} - u$  este un unghi de aproximativ

$40 \cdot 10^{-17}$  radiani, unghi inferior celui sub care am vedea de pe Pămînt orbita unui electron pe lună!

În continuare vom stabili cîteva formule de trigonometrie hiperbolică. În acest scop pentru un  $h$ -triunghi arbitrar  $ABC$  vom conveni să notăm distanțele între vîrfuri prin  $a = d(B, C)$ ,  $b = d(A, C)$ ,  $c = d(A, B)$ , prezența punctului superior fiind destinată să înlăture confuziile posibile cu un eventual triunghi euclidian de vîrfuri  $ABC$ . În mod analog vom nota  $\hat{A} = (\angle BAC)_h$  etc.

**Teorema 8.2.** *În  $h$ -triunghiul  $ABC$  are loc următoarea „formulă a cosinusului laturii”:*  
 $\operatorname{ch} k\hat{a} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} = \cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}$ .

*Demonstrație.* Prin intermediul unei  $h$ -simetrii putem presupune că  $(BC)_h$  este o  $hs$ -dreaptă avînd punctul limită  $U$ . Fie  $V, Z$  centrele cercurilor  $\mathcal{O}_{A,B}$  respectiv  $\mathcal{O}_{A,C}$ . Constatăm ușor  $\hat{A} = \widehat{VAZ}$ ,  $\hat{B} = \widehat{BVU}$ ,  $\hat{C} = \widehat{CZU}$ . Putem deci exprima:  $VA = VB = \frac{BU}{\sin \hat{B}}$ ,  $ZA = ZC = \frac{CU}{\sin \hat{C}}$ ,  $VU = BU \cdot \operatorname{ctg} \hat{B}$ ,  $UZ = CU \cdot \operatorname{ctg} \hat{C}$ ,  $VZ = BU \cdot \operatorname{ctg} \hat{B} + CU \cdot \operatorname{ctg} \hat{C}$ . Teorema cosinusului (din geometria euclidiană) pentru triunghiul  $AVZ$ ,  $VZ^2 = VA^2 + ZA^2 - 2 VA \cdot ZA \cdot \cos \hat{A}$ , devine astfel:

$$(*) \quad \cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \frac{1}{2} \left( \frac{BU}{CU} + \frac{CU}{BU} \right) \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}.$$

Să mai observăm  $k \cdot a = k \cdot d(B, C) = d_h(B, C) = \ln \frac{BU}{CU}$ , deci  $\frac{BU}{CU} = e^{ka}$ ,  $\frac{CU}{BU} = e^{-ka}$  și deci  $\frac{1}{2} \left( \frac{BU}{CU} + \frac{CU}{BU} \right) = \operatorname{ch} k\hat{a}$ . Substituind în (\*) această egalitate obținem formula din enunț.

**Corolar.** *În geometria hiperbolică este valabil „cazul UUU de congruență a triunghiurilor”: dacă triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  au unghiurile respective congruente, atunci  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .*

Într-adevăr, aplicînd teorema deducem  $\operatorname{ch} k\hat{a} = \operatorname{ch} k\hat{a}'$ . Conform definiției funcției cosinus hiperbolic, avînd în vedere că nume-

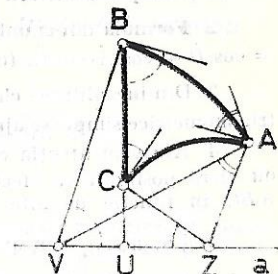


Fig. 80



rele reale  $k\hat{a}$  și  $k\hat{a}'$  sînt pozitive, din egalitatea de mai sus desprindem  $\hat{a} = \hat{a}'$ , adică  $BC = B'C'$ . În final apelăm la cazul ULU de congruență a triunghiurilor.

*Observații.* 1° Denumirea dată în enunțul teoremei de formulă a cosinusului laturii este în principiu arbitrară deoarece ea permite explicitarea lui  $ch\ k\hat{a}$  dar și a lui  $\cos \hat{A}$ .

2° Formula din enunț permutată ciclic asigură și egalitățile  $(ch\ k\hat{b}) \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} = \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C}$ ,  $(ch\ k\hat{c}) \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} = \cos \hat{C} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}$ .

3° Din inegalitatea  $ch\ k\hat{a} > 1$  se obține ușor  $\cos \hat{A} + \cos(\hat{B} + \hat{C}) > 0$ . După calcule trigonometrice simple se ajunge din nou la concluzia  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$ , adică  $\delta(ABC) > 0$ .

4° Atragem atenția că pînă la precizarea valorii lui  $k$  formula cosinusului laturii nu oferă posibilitatea efectivă de a determina un al patrulea element al triunghiului  $ABC$  în funcție de alte trei.

5° Fie  $u < \frac{\pi}{3}$  un unghi arbitrar și  $m = \cos u$ ;  $h$ -punctele  $B, C$  vor fi virfuri ale unui „ $h$ -triunghi echilateral de  $h$ -unghiuri  $u$ ” dacă și numai dacă are loc  $ch\ d_h(B, C) = \frac{m + m^2}{1 - m^2}$ . Particularizînd de exemplu  $u = \frac{\pi}{4}$  avem un procedeu canonic de alegere a unui  $h$ -segment unitate  $BC$ . Este probabil că Gauss avea în vedere o astfel de posibilitate de fixare a unității de lungime în geometria hiperbolică.

6° Prin prezența cazului ULU de congruență a triunghiurilor este evident că în geometria hiperbolică nu pot exista triunghiuri asemenea care să nu fie congruente.

**Teorema 8.3.** În triunghiul hiperbolic  $ABC$  are loc următoarea „formulă a sinusurilor”:

$$\frac{sh\ k\hat{a}}{\sin \hat{A}} = \frac{sh\ k\hat{b}}{\sin \hat{B}} = \frac{sh\ k\hat{c}}{\sin \hat{C}}.$$

*Demonstrație.* Se demonstrează ușor  $sh^2 x = ch^2 x - 1$ . Folosind formula cosinusului laturii obținem:

$$\begin{aligned} sh^2 k\hat{a} \cdot \sin^2 \hat{B} \cdot \sin^2 \hat{C} &= (ch^2 k\hat{a} - 1) \cdot \sin^2 \hat{B} \cdot \sin^2 \hat{C} = \\ &= (\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C})^2 - \sin^2 \hat{B} \cdot \sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{A} + \\ &+ 2 \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} + \cos^2 \hat{B} \cdot \cos^2 \hat{C} - [1 - \cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{C} + \\ &\cos^2 \hat{B} \cdot \cos^2 \hat{C}] = \cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} + 2 \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} - 1. \end{aligned}$$

Expresia finală la care am ajuns este independentă de ordinea în care se consideră virfurile  $A, B, C$ . Avînd în vedere și expresia de la care am pornit deducem că expresia finală poate fi renotată

prin  $\Delta^2$ , numărul real  $\Delta$  fiind asociat triunghiului  $ABC$ . Transcriem egalitatea obținută sub forma  $sh\ k\hat{a} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} = \Delta$ . După permutări ciclice se obține:

$$sh\ k\hat{a} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} = sh\ k\hat{b} \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} = sh\ k\hat{c} \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} = \Delta.$$

După împărțire prin factorul nenul  $\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}$  obținem

$$\frac{sh\ k\hat{a}}{\sin \hat{A}} = \frac{sh\ k\hat{b}}{\sin \hat{B}} = \frac{sh\ k\hat{c}}{\sin \hat{C}} = \frac{\Delta}{\sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}},$$

formulă ce conține și egalitățile din enunț.

*Observații.* 1° Invariantul considerat  $\Delta$  admite și alte exprimări simetrice în raport cu unghiurile unui triunghi; vom prezenta o astfel de formulă în care figurează și „semi-defectul”  $s = \frac{\delta}{2}$ .  $\Delta^2 = (\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C})^2 - \sin^2 \hat{B} \cdot \sin^2 \hat{C} = [\cos \hat{A} + \cos(\hat{B} + \hat{C})] \cdot$

$$\begin{aligned} &\cdot [\cos \hat{A} + \cos(\hat{B} - \hat{C})] = 2 \cos \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2} \cos \frac{-\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2} \cdot 2 \cos \frac{\hat{A} - \hat{B} + \hat{C}}{2} \cdot \\ &\cdot \cos \frac{\hat{A} + \hat{B} - \hat{C}}{2} = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{A} - s\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B} - s\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{C} - s\right) = \\ &= 4 \cdot \sin s \cdot \sin(s + \hat{A}) \cdot \sin(s + \hat{B}) \cdot \sin(s + \hat{C}). \end{aligned}$$

2° Se constată  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh\ ax}{x} = a$ . În formula sinusurilor împărțim prin  $k$  și trecem apoi la limită pentru  $k$  tinzînd la zero. Se obține astfel teorema sinusurilor din geometria euclidiană. Avem deci un argument suplimentar pentru a interpreta geometria euclidiană drept „limită a geometriei hiperbolice” cînd se micșorează valoarea constantei  $k$ , operație ce revine la mărirea etalonului pentru măsura segmentelor.

3° Aici, am dedus formula sinusurilor din formula cosinusului laturii; se poate parcurge și calea inversă.

4° Poate prezenta interes deducerea formulei sinusurilor prin geometrie sintetică și trigonometrie euclidiană pe model (folosind în continuare figura 80). Preferința noastră exprimă intenția de a restringe cît mai mult rolul raționamentului pe model.

**Teorema 8.4.** Într-un  $h$ -triunghi  $ABC$  are loc următoarea „formulă a cosinusului unghiului”:

$$ch\ k \cdot \hat{a} = ch\ k \cdot \hat{c} - (sh\ k \cdot \hat{b}) \cdot (sh\ k \cdot \hat{c}) \cdot \cos \hat{A}.$$

*Demonstrație.* Folosind cele trei formule ale cosinusului laturii obținem:  $(ch\ k \cdot \hat{b} \cdot ch\ k \cdot \hat{c} - ch\ k \cdot \hat{a}) \cdot \sin^2 \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} = (\cos \hat{B} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C}) \cdot (\cos \hat{C} + \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B}) - (\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C}) \cdot \sin^2 \hat{A} =$   
 $= (\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \cos \hat{A} - \cos \hat{B} \cos \hat{C}) + \cos \hat{A} \cdot (\cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B}) +$   
 $+ \cos^2 \hat{A} (\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cos \hat{C}) = \cos \hat{A} (-1 + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} + 2 \cos \hat{B} \cos \hat{C} \cos \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) = \Delta^2 \cdot \cos \hat{A} = (sh\ k\hat{b} \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C}) \cdot$



$(\text{sh } k \cdot \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B}) \cdot \cos \hat{A} = \text{sh } k \cdot \text{sh } k \cdot \sin^2 \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos \hat{A}$ .  
După simplificarea factorului nenul  $\sin^2 \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}$  se capătă formula din enunț.

**Observații.** 1° Permutând virfurile  $A, B, C$  obținem încă două formule ale „cosinului unghiului”.

2° Pornind de la cele trei formule ale cosinului unghiului putem deduce prin calcule algebrice simple formulele cosinului laturii.

3° Se constată  $\lim_{x \rightarrow 0} (\text{ch } ax - 1) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2}(\text{ch } ax - 1) = \frac{1}{2} a^2$ . Folosind provizoriu notațiile  $\alpha = k^{-2}(\text{ch } k \cdot a - 1)$ ,  $\beta = k^{-2}(\text{ch } k \cdot b - 1)$ ,  $\gamma = k^{-2}(\text{ch } k \cdot c - 1)$  și  $\delta = k^{-2}(\text{sh } k \cdot a) \cdot (\text{sh } k \cdot b)$  observăm că formula din enunț se transcrie sub forma  $2\alpha = 2(\beta + \gamma + k^2\beta\gamma - \delta \cdot \cos \hat{A})$ . Trecem la limită pentru  $k$  tinzând la zero și obținem  $a^2 = b^2 + c^2 + 0 - 2b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ , adică teorema cosinului din geometria euclidiană.

**Teorema 8.5.** Oricare ar fi numerele reale,  $a, b, c$  încît  $|b - c| < a < b + c$  există un  $h$ -triunghi  $ABC$  încît  $\hat{a} = a$ ,  $\hat{b} = b$ ,  $\hat{c} = c$ .

**Demonstrație.** Enunțul se referă la convenția de notare  $\hat{a} = d(B, C) = \frac{1}{k} d_h(B, C)$  deci subînțelege constanta  $k$  precizată.

Fie  $\alpha = \frac{(\text{ch } k \cdot b) \cdot (\text{ch } k \cdot c) - (\text{ch } k \cdot a)}{(\text{sh } k \cdot b) \cdot (\text{sh } k \cdot c)}$ . Folosind formulele (8.1) (8.3)

se dovedesc echivalențele:  $\alpha < 1 \Leftrightarrow (\text{ch } k \cdot b) \cdot (\text{ch } k \cdot c) - (\text{ch } k \cdot a) < (\text{sh } k \cdot b) \cdot (\text{sh } k \cdot c) \Leftrightarrow \text{ch } k \cdot a > \text{ch } k(b - c) \Leftrightarrow \text{ch } k \cdot a > \text{ch } k|b - c| \Leftrightarrow k \cdot a > k|b - c|$ . Observăm deci că premisa  $|b - c| < a$  asigură  $\alpha < 1$ . În mod analog se constată că din  $a < b + c$  urmează  $-1 < \alpha$ . Prin urmare există un unghi  $u \in (0, \pi)$  încît  $\cos u = \alpha$ .

Vom alege un  $h$ -punct arbitrar  $A$  și  $h$ -semidreptele  $[A; X)$ ,  $[A; Y)$  formind între ele unghiul  $u$ . Pe aceste  $h$ -semidrepte vom lua puncte  $B$  respectiv  $C$  încît  $d_h(A, B) = kc$ ,  $d_h(A, C) = kb$ . Pentru  $h$ -triunghiul  $ABC$  obținut au loc evident egalitățile  $\hat{b} = b$  și  $\hat{c} = c$ . Calculând prin formula cosinului obținem desigur  $\text{ch } k \cdot \hat{a} = \alpha = \text{ch } k \cdot a$ , deci are loc și  $\hat{a} = a$ , q.e.d.

**Observații.** 1° Considerăm necesar să sublinim rolul constantei  $k$  (a cărei alegere echivala cu fixarea unui  $h$ -segment de „lungime hiperbolică” 1). Unghiul  $u$  construit depinde efectiv de  $k$ ; este de exemplu posibil ca pentru un anumit  $k$  să obținem  $A = \frac{\pi}{2}$  deci un  $h$ -triunghi dreptunghic  $ABC$  iar pentru alte valori  $k'$  să obținem un  $h$ -triunghi  $AB'C'$  care să nu mai fie dreptunghic în  $A$ . Și în geometria euclidiană lungimile laturilor unui triunghi nu îl determină efectiv decât după fixarea etalonului dar îi determină mărimea unghiurilor.

2° Teorema 8.5 aparține geometriei absolute deoarece este valabilă independent de acceptarea postulatului paralelelor sau a negației sale. Aici a fost probată valabilitatea teoremei în ipoteza suplimentară că are loc axioma  $\neg V$ , ipoteză ce a permis dez-

voltarea unor tehnici specifice geometriei hiperbolice și care au conlucrat spre obținerea demonstrației. În cadrul geometriei euclidiene teorema 8.5 beneficiază de altă demonstrație care necesită tehnici specifice geometriei euclidiene cum ar fi introducerea conceptului de cerc și studiul pozițiilor relative a două cercuri. Desigur, geometria neeuclidiană poate adopta (cu precauțiile de rigoare) o bună parte din tehnicile de geometria euclidiană (și reciproc).

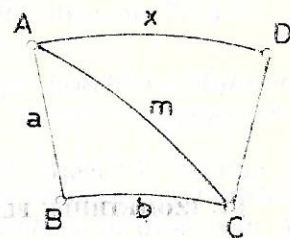


Fig. 81

**Teorema 8.6.** Fie  $ABCD$  un patrulater Saccheri. Are loc  $AD > BC$ .

**Demonstrație.** Fie  $d(A, B) = a$ ,  $d(B, C) = b$ .  
Ne propunem să calculăm  $d(A, C) = m$ ,

$\hat{ACB} = u$  și apoi  $d(A, D) = x$ . Aplicăm în triunghiul  $ABC$  formula cosinului unghiului  $B$  și deducem:  $\text{ch } k \cdot m = (\text{ch } k \cdot a) \cdot (\text{ch } k \cdot b)$ . În același triunghi, formula sinusurilor asigură sin  $u \cdot (\text{sh } k \cdot m) = \text{sh } k \cdot a$ , ce se transcrie sub forma  $\cos \hat{ACD} \cdot (\text{sh } k \cdot m) = \text{sh } ka$ . Formula cosinului unghiului  $ACD$  ne conduce la:  $\text{ch } k \cdot x (\text{ch } k \cdot m) \cdot (\text{ch } k \cdot a) - (\text{sh } k \cdot m) \cdot (\text{sh } k \cdot a) \cdot \cos \hat{ACD} = (\text{ch } k \cdot a) \cdot (\text{ch } k \cdot b) - \text{sh } k \cdot a = (\text{ch } k \cdot b) + (\text{sh } k \cdot a) \cdot (\text{ch } k \cdot b - 1)$ . Datorită importanței sale intrinseci vom reține formula obținută: (\*)  $\text{ch } k \cdot x - \text{ch } k \cdot b = (\text{sh } k \cdot a) \cdot (\text{ch } k \cdot b - 1)$ .

Membrul secund este evident pozitiv, deci  $\text{ch } k \cdot x > \text{ch } k \cdot b$ , de unde, conform (8.3), rezultă  $x > b$ , q.e.d.

**Corolar.** Dacă în triunghiul  $ABC$  notăm cu  $D, E$  mijloacele laturilor  $AB, AC$ , lungimea liniei mijlocii  $d(D, E)$  este strict mai mică decât jumătatea bazei  $a = d(B, C)$ .

**Demonstrație.** Fie  $F$  piciorul perpendicularei coborâte din  $A$  pe  $(DE)$  și  $G, H$  simetricele punctului  $F$  față de punctele  $D, E$ . Con-

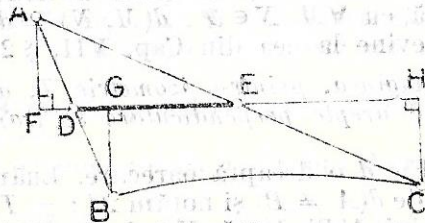


Fig. 82

form cazului LUL stabilim  $\triangle DAF \equiv \triangle DBG$  și  $\triangle EAF \equiv \triangle ECH$ . Urmează  $BG \perp GH$ ,  $GH \perp HC$  și  $BG \equiv HC$ . Deci  $BGHC$  este patrulater Saccheri și  $d(B, C) > d(G, H) = 2 \cdot d(D, E)$ , q.e.d.



## SISTEMUL AXIOMATIC AL LUI BACHMANN

(Capitol redactat de prof. dr. Francisc Radó)

## § 1. IZOMETRIILE PLANULUI ABSOLUT

Izometriile planului euclidian (vezi Cap. VII) și  $h$ -transformările planului hiperbolic (Cap. VIII) prezintă o serie de proprietăți comune. Explicația rezidă în faptul că ambele tipuri de transformări sînt izometrii ale planului absolut.

Se observă de asemenea că multe demonstrații cu privire la izometriile planului euclidian se bazează doar pe primele trei grupe de axiome ale lui Hilbert. Se impune deci un studiu al izometriilor în acest cadru mai general.

În accepțiunea clasică, introdusă de J. Bolyai, termenul de plan absolut presupune primele patru grupe de axiome hilbertiene. Vom folosi aici noțiunea de *plan absolut* într-o accepțiune mai generală, presupunînd doar axiomele de incidență (în plan), de ordonare și de congruență.

Fie  $\mathcal{P}$  mulțimea punctelor unui astfel de plan absolut. O aplicație  $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  se numește *izometrie* dacă

$$(1) \quad \forall M \in \mathcal{P} : MN \equiv T(M)T(N).$$

Din această definiție rezultă imediat că  $T$  este o aplicație injectivă.

**Observație.** Dacă admitem și axiomele de continuitate, condiția (1) este echivalentă cu  $\forall M, N \in \mathcal{P} : d(M, N) = d(T(M), T(N))$ , și definiția noastră revine la cea din Cap. VII, § 2.

**Teorema 1.** *Imaginea, printr-o izometrie  $T$ , a unei drepte este o dreaptă, iar două drepte perpendiculare se transformă în drepte perpendiculare.*

**Demonstrație.** Fie  $d$  o dreaptă oarecare. Luăm două puncte  $A$  și  $B$  simetrice față de  $d$  ( $A \neq B$ ) și notăm  $A' := T(A)$ ,  $B' := T(B)$ ,  $d' :=$  mediatoarea lui  $A'B'$ . Dacă  $M \in d$ , din  $MA \equiv MB$  deducem  $T(M)A' \equiv T(M)B'$ , deci  $T(M) \in d'$  și  $T(d) \subseteq d'$ . Fie acum  $N \in d'$ ; din axiomele de congruență rezultă că există triunghiurile  $AM_1B$ ,  $AM_2B$ ,  $A'N_1B'$  astfel încît  $M_1 \neq M_2$ ,  $N \neq N_1$  și  $\triangle AM_1B \equiv$

$\triangle AM_2B \equiv \triangle A'N_1B' \equiv \triangle A'NB'$ . Ținînd cont de (1) obținem  $T(M_1) \equiv N$  sau  $T(M_1) = N'$ . În cazul al doilea în mod necesar  $T(M_2) = N$ , deci în ambele cazuri  $N \in T(d)$ , adică  $d' \subseteq T(d)$ . Rezultă  $T(d) = d'$ . Aplicînd acest rezultat dreptei  $(AB)$ , obținem  $T((AB)) = (A'B')$  și teorema este demonstrată.

**Teorema 2.** *Orice izometrie este o aplicație bijectivă. Mulțimea izometriilor planului absolut  $\mathcal{P}$  formează în raport cu compunerea un grup  $\mathcal{G}$ .*

**Demonstrație.** Izometria oarecare  $T$  fiind injectivă, rămîne să arătăm că  $\text{im } T = \mathcal{P}$ . Fie  $d$  o dreaptă fixă și  $d'$  imaginea ei. Considerăm un punct oarecare  $N \in \mathcal{P}$ . Perpendiculara  $d_1$  pe  $d$ , dusă prin  $N$ , taie  $d'$  într-un punct  $P$ . Conform teoremei 1, există  $Q \in d$  astfel ca  $T(Q) = P$  și imaginea perpendicularei prin  $Q$  pe  $d$  este  $d_1$ . Așadar  $N \in \text{im } T$  și  $\mathcal{P} = \text{im } T$ .

Evident,  $1_{\mathcal{P}}$  este o izometrie și împreună cu  $T_1$ ,  $T_2$  și  $T_1 \circ T_2$  este o izometrie. Fie  $P, Q$  două puncte oarecare; înlocuind în (1)  $M = T^{-1}(P)$ ,  $N = T^{-1}(Q)$  se obține:  $T^{-1}(P)T^{-1}(Q) \equiv PQ$ , deci  $T^{-1}$  este o izometrie.

$T_1 \circ T_2$  se va nota și cu  $T_1 \cdot T_2$  sau  $T_1 T_2$  și se va numi produsul izometriilor  $T_1$  și  $T_2$ .

Simetria față de o dreaptă  $d$  (axială), notată  $\tilde{d}$  și simetria față de un punct  $A$  (centrală), notată  $\tilde{A}$ , se definesc ca și în Cap. VII, § 3. Demonstrațiile teoremelor următoare sînt analoage cu cele din Cap. VII, § 3.

**Teorema 3.** *Fie  $a$  o dreaptă și  $\tilde{a}$  simetria față de  $a$ . Atunci:*

- 1)  $\tilde{a}$  este o izometrie.
- 2)  $\tilde{a}(M) = M \Leftrightarrow M \in a$ .

**Teorema 4.** 1) *Fie  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ . Atunci există  $T \in \mathcal{G}$  astfel încît  $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$ ,  $T(C) = C'$ .*

2) *Orice izometrie este un produs de cel mult trei simetrii axiale.*  
3) *Dacă  $a = (AB)$ , iar  $A$  și  $B$  sînt punctele fixe ale izometriei  $T$ , atunci  $T = 1_{\mathcal{P}}$  sau  $T = \tilde{a}$  (după cum există sau nu există un punct fix nesituat pe  $a$ ).*

4) *Dacă  $T \in \mathcal{G}$  are un punct fix unic, atunci  $T$  este un produs de două simetrii axiale.*

Ca un corolar obținem: dacă  $a$  și  $b$  sînt drepte distincte, atunci

$$(2) \quad \tilde{a}\tilde{b}(M) = M \Leftrightarrow \{M\} = a \cap b.$$

Într-adevăr, fie  $\tilde{a}\tilde{b}(M) = M$ , adică  $\tilde{b}(M) = \tilde{a}(M) =: N$ ; dacă  $M \neq N$ , atunci  $a$  și  $b$  sînt mediatoarele aceluiași segment  $MN$ ,



adică  $a = b$ , contrar ipotezei. Deci  $M = N$  și din  $\tilde{a}(M) = M$ ,  $\tilde{b}(M) = M$  deducem în virtutea teoremei 3 că  $M \in a$ ,  $M \in b$ . Implicația contrară rezultă imediat.

Notăm cu  $\mathcal{I}$  mulțimea izometriilor involutive:

$$\mathcal{I} := \{T \in \mathcal{G} \mid T^2 = 1_{\mathcal{G}}, T \neq 1_{\mathcal{G}}\}.$$

Evident, simetriile axiale și cele centrale sînt involutive.

**Teorema 5.** Fie  $a$  și  $b$  două drepte; atunci

$$1) a \perp b \Leftrightarrow \tilde{a} \circ \tilde{b} \in \mathcal{I},$$

$$2) a \perp b, \{C\} = a \cap b \Rightarrow \tilde{C} = \tilde{a} \circ \tilde{b}.$$

*Demonstrație.* 1) Să presupunem că  $a \perp b$  și  $\{C\} = a \cap b$ . Fie  $A \in a \setminus \{C\}$ ,  $B \in b \setminus \{C\}$  și  $T := \tilde{a} \circ \tilde{b}$ . Cum  $\tilde{b}(A) \in a$ , avem  $T(A) = \tilde{a}[\tilde{b}(A)] = \tilde{b}(A)$ , deci  $T^2(A) = T[\tilde{b}(A)] = \tilde{a}\tilde{b}(A) = \tilde{a}(A) = A$  și analog  $T^2(B) = B$ . Ținînd cont și de  $T^2(C) = C$ , din teorema 4,3) obținem că  $T^2 = 1_{\mathcal{G}}$ . Dar  $T = 1_{\mathcal{G}}$  nu este posibil (căci am avea  $\tilde{a} = \tilde{b}$  și  $a = b$  în contradicție cu  $a \perp b$ , deci  $T \in \mathcal{I}$ ).

Fie  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \in \mathcal{I}$ . Atunci  $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ . Să presupunem că  $a$  nu este perpendicular pe  $b$  și  $B \in b \setminus a$ ; rezultă  $\tilde{a}(B) \notin b$  (căci în caz contrar  $a \perp b$ ), deci  $\tilde{a}\tilde{b}(B) \neq \tilde{a}(B) = \tilde{a}\tilde{b}(B)$ , ceea ce implică  $\tilde{b} \circ \tilde{a} \neq \tilde{a} \circ \tilde{b}$  și  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{a} \neq 1_{\mathcal{G}}$ , în contradicție cu  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \in \mathcal{I}$ .

2) Fie  $a \perp b$ ,  $\{C\} = a \cap b$  și  $T = \tilde{a} \circ \tilde{b}$ . În virtutea lui (2),  $C$  este singurul punct fix al lui  $T$ . Deoarece  $T$  este involutivă, oricare ar fi  $M \in P \setminus \{C\}$ , segmentul  $MT(M)$  se transformă în el însuși (capetele lui se transformă unul în altul), de unde rezultă că mijlocul lui  $MT(M)$  este un punct fix, deci coincide cu  $C$ . Se vede deci că  $T(M) = \tilde{C}(M)$  și astfel  $T = \tilde{C}$ .

**Corolarul 1.** Orice izometrie involutivă  $T$  este o simetrie axială sau o simetrie centrală.

Într-adevăr, conform raționamentului de mai sus  $T$  are cel puțin un punct fix. Dacă are două puncte fixe, atunci din teorema 4,3) rezultă că  $T$  este o simetrie axială. Dacă  $T$  are un singur punct fix, din teorema 4,4) deducem că  $T$  are forma  $\tilde{a} \circ \tilde{b}$ , iar din teorema 4,1) rezultă că  $a \perp b$ , deci  $T$  este o simetrie de centru  $a \cap b$ .

**Corolarul 2.** Oricare ar fi dreptele  $a, b, c$  avem

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} \neq 1_{\mathcal{G}}.$$

Într-adevăr, să admitem că  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} = 1_{\mathcal{G}}$ , adică  $\tilde{a} \circ \tilde{b} = \tilde{c}$ . Rezultă că  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \in \mathcal{I}$ , deci în virtutea teoremei 5,  $\tilde{a} \circ \tilde{b} = \tilde{C}$ , unde  $\{C\} = a \cap b$ . Deci  $\tilde{C} = \tilde{c}$ , ceea ce este absurd deoarece  $\tilde{C}$  are un singur punct fix, în timp ce  $\tilde{c}$  are o infinitate de puncte fixe.

**Teorema 6.** Dacă  $a$  este o dreaptă și  $A$  un punct, atunci

$$A \in a \Leftrightarrow \tilde{A}\tilde{a} \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \tilde{a}\tilde{A} \in \mathcal{I}.$$

*Demonstrație.* Fie  $b$  perpendiculara din  $A$  pe  $a$ . Dacă  $A \in a$ , atunci conform teoremei 5,  $\tilde{A} = \tilde{a} \circ \tilde{b} = \tilde{b} \circ \tilde{a}$ , deci  $\tilde{a} \circ \tilde{A} = \tilde{A} \circ \tilde{a} = \tilde{b} \in \mathcal{I}$ . Fie acum  $\tilde{A} \circ \tilde{a} \in \mathcal{I}$  și să presupunem că  $A \notin a$ . Atunci  $A' := \tilde{a}(A) \neq A$ , deci  $\tilde{A}(A') \neq A'$ , adică  $\tilde{A}\tilde{a}(A) \neq \tilde{a}(A) = \tilde{a}\tilde{A}(A)$ . Rezultă că  $\tilde{A} \circ \tilde{a} \neq \tilde{a} \circ \tilde{A}$  și  $(\tilde{A} \circ \tilde{a}) \circ (\tilde{A} \circ \tilde{a}) \neq 1_{\mathcal{G}}$ , în contradicție cu  $\tilde{A} \circ \tilde{a} \in \mathcal{I}$ . Așadar  $\tilde{A} \circ \tilde{a} \in \mathcal{I}$  (și la fel  $\tilde{a} \circ \tilde{A} \in \mathcal{I}$ ) implică  $A \in a$ .

**Teorema 7.** (Teorema celor trei simetrii). Fie  $a, b, c$  drepte.

1) Dacă  $a, b, c$  au un punct comun  $P$ , atunci  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} = \tilde{d}$ , unde  $d$  este o dreaptă care conține punctul  $P$ .

2) Dacă  $a, b, c$  au o perpendiculară comună  $l$ , atunci  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c} = \tilde{d}$ , unde  $d$  este o dreaptă perpendiculară pe  $l$ .

*Demonstrație.* Dacă  $a = b$ , ambele afirmații sînt evidente. Fie în continuare  $a \neq b$  și  $T = \tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{c}$ .

1) Cum  $P$  este unicul punct fix al lui  $\tilde{a} \circ \tilde{b}$ , luînd un punct  $C \in c \setminus \{P\}$ , rezultă  $T(C) = \tilde{a}\tilde{b}(C) \neq C$ . Mediatoarea  $d$  a segmentului  $CT(C)$  trece prin  $P$  (căci  $PC = T(P)T(C) = PT(C)$ ). Izometria  $\tilde{d}T$  are punctele fixe  $P$  și  $C$ , deci conform teoremei 4,3)  $\tilde{d}T = 1_{\mathcal{G}}$  sau  $\tilde{d}T = \tilde{c}$ . În cazul al doilea  $\tilde{d} = \tilde{d}\tilde{c}\tilde{c} = \tilde{d}\tilde{d}T\tilde{c} = T\tilde{c} = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{c} = \tilde{a}\tilde{b}$ , deci  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{d} = 1_{\mathcal{G}}$ , ceea ce este în contradicție cu corolarul 2. Rezultă că  $T = \tilde{d}$ .

2) Notăm  $\{Q\} := c \cap l$ . Cum  $a \cap b = \emptyset$ , relația (2) implică  $Q' := T(Q) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}(Q) = \tilde{a}\tilde{b}(Q) \neq Q$ . Fie  $d$  mediatoarea segmentului  $QQ'$ . Atunci  $\tilde{d}T(l) = \tilde{d}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}(l) = l$  (deoarece  $a, b, c, d \perp l$ ) și  $\tilde{d}T(Q) = \tilde{d}(Q') = Q$ ; rezultă că perpendiculara prin  $Q$  pe  $l$ , adică dreapta  $c$  este și ea fixă la izometria  $\tilde{d}T$ . Deoarece  $\tilde{d}T = \tilde{d}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$  păstrează cele două semiplane limitate de  $l$ , rezultă  $\tilde{d}T = \tilde{c}$  sau  $\tilde{d}T = 1$ . Primul caz conduce la o contradicție, ca mai sus; deci  $T = \tilde{d}$ .

## §2. SCUFUNDAREA PLANULUI ABSOLUT ÎN GRUPUL IZOMETRIILOR SALE

Aplicațiile  $a \mapsto \tilde{a}$  și  $A \mapsto \tilde{A}$  de la mulțimea dreptelor (punctelor) în grupul  $\mathcal{G}$  fiind injective, putem identifica dreapta oarecare  $a$  cu simetria  $\tilde{a}$  și punctul arbitrar  $A$  cu simetria  $\tilde{A}$ . Astfel mulțimea  $\mathcal{P}$



a punctelor și mulțimea  $\mathcal{D}$  a dreptelor planului absolut devin submulțimi ale lui  $\mathcal{G}$ , pentru care

$$\mathcal{D} \cup \mathcal{D} = \mathcal{G} \text{ și } \mathcal{D} \cap \mathcal{D} = \emptyset.$$

Conform teoremei 4,2) mulțimea  $\mathcal{D}$  este un sistem de generatori pentru  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G} = \langle \mathcal{D} \rangle = \{d_1 d_2 d_3 \mid d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}\}.$$

Elementul neutru  $1_{\mathcal{D}}$  al lui  $\mathcal{D}$  se va nota cu 1.

Teoremele 5 și 6 din § 1 permit exprimarea relațiilor geometrice fundamentale de incidență și perpendicularitate printr-o proprietate grupală:

$$A \in a \Leftrightarrow Aa \in \mathcal{I},$$

$$a \perp b \Leftrightarrow ab \in \mathcal{I}.$$

Se deschide astfel posibilitatea de a rezolva probleme geometrice cu ajutorul calculului grupal, deci o nouă metodă algebrică în geometrie (pe lângă cea analitică).

După identificarea lui  $\tilde{A}$  cu  $A$ , notația  $AB$  va însemna un produs în  $\mathcal{G}$ ; pentru a evita confuzii, dreapta care trece prin  $A$  și  $B$  va fi însemnată cu  $\overline{AB}$  (segmentul  $AB$  nu va apărea în continuare).

**Teorema 1.** Oricare ar fi  $a \in \mathcal{D}$ ,  $A \in \mathcal{P}$  și  $T \in \mathcal{G}$  avem

$$(3) \quad T(a) = TaT^{-1} \text{ și } T(A) = TAT^{-1}.$$

*Demonstrație.* Deoarece  $TaT^{-1} \neq 1$ ,  $TaT^{-1}TaT^{-1} = 1$ , rezultă  $TaT^{-1} \in \mathcal{I}$  și analog  $TAT^{-1} \in \mathcal{I}$ . Dacă  $M \in T(a)$ , adică  $M = T(N)$ ,  $N \in a$ , atunci  $TaT^{-1}(M) = Ta(N) = T(N) = M$ . Așadar la izometria involutivă  $TaT^{-1}$  orice punct al dreptei  $T(a)$  este fix, deci  $TaT^{-1}$  coincide cu simetria față de  $T(a)$ , care acum se notează cu  $T(a)$ . A doua egalitate (3) se demonstrează în mod analog.

Din (3) obținem:

$$(4) \quad \begin{cases} b(a) = bab, \\ B(a) = BaB, \end{cases} \quad \begin{cases} b(A) = bAb \\ B(A) = BAB. \end{cases}$$

Relația  $b(a) = c$  înseamnă că  $b$  este axă de simetrie pentru  $a$  și  $c$ ;  $b(A) = C$  înseamnă că  $b$  este mediatoarea perechii de puncte  $A, C$ ;  $B(A) = C$  înseamnă că  $B$  este mijlocul lui  $A, C$ . Așadar avem:

**Teorema 2.** Dacă  $a, b, c \in \mathcal{D}$  și  $A, B, C \in \mathcal{P}$ , atunci

- 1)  $b$  este axă de simetrie pentru  $a, c \Leftrightarrow ab = bc$ ;
- 2)  $B$  este mijlocul lui  $A, C \Leftrightarrow AB = BC$ ;
- 3)  $b$  este mediatoarea lui  $A, C \Leftrightarrow Ab = bC$ .

Vedem deci că proprietățile planului absolut se traduc în termeni grupali și acest plan poate fi studiat cu ajutorul grupului  $\mathcal{G}$ . Sintem conduși la o nouă generalizare, dacă reținem doar proprietățile esențiale ale lui  $\mathcal{G}$ , ceea ce vom face în paragraful următor.

### § 3. PLANUL GRUPAL

Fie  $\Gamma$  un grup și  $\Delta$  un sistem de generatori ai lui  $\Gamma$ , constituit din elemente involutive, adică orice  $\gamma \in \Gamma$  poate fi scris sub forma  $a_1 a_2 \dots a_n$  cu  $a_i \in \Delta$  și

$$(5) \quad \Delta \subseteq \text{Inv } \Gamma := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma^2 = 1, \gamma \neq 1\}.$$

Presupunem că sistemul  $\Delta$  este invariant:

$$(6) \quad a \in \Delta \Rightarrow a\Delta a \subseteq \Delta.$$

Fie  $\Delta\Delta := \{ab \mid a, b \in \Delta\}$  și

$$(7) \quad \Pi := \Delta\Delta \cap \text{Inv } \Gamma.$$

Elementele lui  $\Delta$  și  $\Pi$  vor fi numite respectiv *drepte* și *puncte*. Elementele lui  $\Delta, \Pi, \Gamma$  se vor nota respectiv cu  $a, b, c, \dots; A, B, C, \dots; \alpha, \beta, \gamma, \dots$ .

Perechea  $(\Gamma, \Delta)$  se numește un *grup generat de simetrii* sau *grup AGS* (după prescurtarea cărții lui F. Bachmann: „Aufbau der Geometrie au dem Spiegelungsbegriff” (Construirea geometriei din noțiunea de simetrie), ediția I, Berlin, 1959) dacă sînt îndeplinite următoarele *axiome ale lui Bachmann*:

**B1.** Dacă  $A, B \in \Pi$  sînt puncte distincte, atunci există un unic  $c \in \Delta$  astfel încît  $Ac \in \text{Inv } \Gamma$  și  $Bc \in \text{Inv } \Gamma$ . Dreapta  $c$  va fi notată cu  $\overline{AB}$ .

**B2.** Dacă  $aA, bA, cA \in \text{Inv } \Gamma$  sau  $al, bl, cl \in \text{Inv } \Gamma$ , atunci  $abc \in \Delta$ .

**B3.** Există  $g, h, j \in \Delta$  astfel încît  $gh \in \text{Inv } \Gamma$  și  $jg, jh, j(gh) \notin \text{Inv } \Gamma$ .



Structurii algebrice  $(\Gamma, \Delta)$  i se asociază o structură geometrică  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta) := (\Pi, \Delta, I, \perp)$ , unde  $I := \{(A, a) \mid A \in \Pi, a \in \Delta, aA \in \text{Inv } \Gamma\}$  și  $\perp := \{(a, b) \mid a, b \in \Delta, ab \in \text{Inv } \Gamma\}$ . Structura  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$  se numește *plan grupal* sau *plan metric*.

Relația  $(A, a) \in I$  se notează mai scurt astfel:  $AIa$  sau  $aIA$  și se citește „ $A$  este incident cu  $a$ ”. Relația  $(a, b) \in \perp$  se mai notează  $a \perp b$  și se citește „ $a$  este perpendicular pe  $b$ ”.

Din  $ab \in \text{Inv } \Gamma$  rezultă  $ba = (ab)^{-1} \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $a \perp b$  implică  $b \perp a$ . Dacă  $a \neq b$  și există  $C$  astfel încât  $CIA, CIB$ , spunem că dreptele  $a$  și  $b$  sînt „concurente”.

Fiecărui  $c \in \Delta$  i se asociază aplicația  $\tilde{c}: \Gamma \rightarrow \Gamma$ , definită prin  $\tilde{c}(\gamma) = c\gamma c$  pentru orice  $\gamma \in \Gamma$ , numită *simetria față de dreapta  $c$* . Se constată fără dificultate că  $\tilde{c}$  este bijectivă și în virtutea lui (6), dacă  $a \in \Delta$ , atunci  $\tilde{c}(a) \in \Delta$ . De asemenea

$$(8) \quad z \in \text{Inv } \Gamma \Rightarrow \tilde{c}(z) \in \text{Inv } \Gamma,$$

căci  $[\tilde{c}(z)]^2 = cxc \cdot cxc = 1$  și  $cxc \neq 1$ . Rezultă că  $\tilde{c}$  transformă punct în punct. Așadar  $\tilde{c}$  conservă dreptele și punctele și ținînd seama de (8), rezultă că păstrează incidențele și perpendicularitățile.

Fie  $\tilde{\Delta} := \{\tilde{c} \mid c \in \Delta\}$  și  $\tilde{\Gamma}$  grupul de transformări ale lui  $\Gamma$ , generat de  $\tilde{\Delta}$ . Unui element arbitrar  $\gamma \in \Gamma$  îi facem să corespundă  $\tilde{\gamma}: \Gamma \rightarrow \Gamma$ ,  $\tilde{\gamma}(\zeta) = \gamma\zeta\gamma^{-1}$ . Deoarece  $\gamma$  poate fi pus sub forma  $\gamma = a_1 \dots a_n$ ,  $a_i \in \Delta$ , avem  $\tilde{\gamma}(\zeta) = a_1 \dots a_n \zeta a_n \dots a_1 = \tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n(\zeta)$ , deci  $\tilde{\gamma} = \tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n \in \tilde{\Gamma}$ . Rezultă că și bijecția  $\tilde{\gamma}$  conservă dreptele, punctele, incidențele și perpendicularitățile. Restricția lui  $\tilde{\gamma}$  pe  $\Delta \cup \Pi$  se numește o *izometrie*, iar  $\tilde{\gamma}$  însăși o *mișcare* a planului  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$ . Deoarece  $\tilde{\Delta}$  este un sistem de generatori ai lui  $\tilde{\Gamma}$ , o mișcare este determinată prin restricția ei pe  $\Delta$ : nu există o distincție esențială între o izometrie și mișcare determinată de ea. Grupul de transformări  $\tilde{\Gamma}$  se numește *grupul de mișcare* al lui  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$ .

Planul absolut este un plan grupal. Într-adevăr, luînd  $\Gamma = \mathcal{G}$  și  $\Delta = \mathcal{O}$ , condiția (5) este evident satisfăcută, iar condiția (6) rezultă din prima formulă (4). În acest caz  $\Pi = \mathcal{P}$ , deoarece singurele izometrii involutive sînt simetriile, iar conform teoremei 5 din § 1 orice simetrie centrală este un produs de două simetrii axiale. **B1** rezultă din axiomele de incidență ale lui Hilbert, **B2** este teorema celor trei simetrii, iar **B3** se verifică cu următoarele elemente:  $g$  o dreaptă în planul absolut,  $A$  un punct neincident cu  $g$ ,  $h$  perpendiculara din  $A$  pe  $g$ ,  $C := h \cap g$ ,  $B \in g \setminus \{C\}$  și în sfîrșit  $j := \text{dreapta } \overline{AB}$ .

Vedem deci că planul grupal este o generalizare a noțiunii de plan absolut. Prin „geometrie absolută” într-un sens modern se

înțelege studiul planului grupal și al unor structuri care se obțin prin slăbirea axiomelor planului grupal.

Dar să rămînem la noțiunea de plan grupal, care cuprinde pe lîngă geometriile neeuclidiene clasice (hiperbolice și eliptice) și multe alte geometrii. În planul grupal nu există presupuneri de ordonare sau de concurența dreptelor și nici de omogenitate, adică pot exista puncte  $A$  și  $B$  astfel ca nici o mișcare nu aplică  $A$  în  $B$ . Atunci perechea  $A, B$  nu are mediatoare.

Am afirmat că planele neeuclidiene clasice sînt plane grupale. Afirmatia este desigur adevărată pentru planul hiperbolic, deoarece acesta este un plan absolut. Vrem să schițăm noțiunea de plan eliptic clasic cu ajutorul unui model al său, pentru a arăta că el este de asemenea un plan grupal. (Menționăm că, în fond, definiția axiomatică a planului eliptic diferă de sistemul axiomatic al lui Hilbert prin axiomele de ordonare și de paralelism, care impun că oricare două drepte au un punct comun. Acest sistem de axiome este de asemenea categoric, deci planul eliptic poate fi studiat pe un model.)

Fie  $S$  o sferă de centru  $O$  în spațiul euclidian clasic. Identificînd punctele diametral opuse ale lui  $S$ , se obțin *punctele modelului*, sau *e-punctele*. Deci un *e-punct* este o pereche de puncte ale lui  $S$ . *Dreptele modelului* sau *e-dreptele* sînt cercurile mari ale lui  $S$ , cu punctele diametral opuse identificate. Rezultă imediat că două *e-drepte* distincte au totdeauna un singur *e-punct* comun. Două *e-drepte* se numesc *perpendiculare*, dacă planele lor sînt perpendiculare. Toate *e-dreptele* perpendiculare pe o *e-dreaptă  $p$*  trec printr-un *e-punct* fix  $P$  (intersecția lui  $S$  cu perpendiculara prin  $O$  pe planul lui  $p$ ); *e-punctul  $P$*  se numește *polul* lui  $p$ , iar *e-dreapta  $p$*  polara lui  $P$ . Două *e-drepte* distincte posedă totdeauna o perpendiculară comună și anume polara *e-punctului* lor de intersecție. Dacă *e-punctul  $A$*  nu este *polul* lui  $b$ , atunci există prin  $A$  o *e-perpendiculară* unică pe  $b$ ; dacă  $A$  este *polul* lui  $b$ , orice *e-dreaptă* prin  $A$  este perpendiculară pe  $b$ .

*Mișcările modelului* sînt induse de izometriile spațiului euclidian, care păstrează sfera  $S$ . Simetria de centru  $O$  schimbă între ele punctele diametral opuse ale lui  $S$ , deci induce pe model aplicația identică. Așadar orice mișcare a modelului poate fi obținută din rotațiile euclidiene în jurul axelor ce trec prin  $O$ . Axa unei rotații  $\rho$  taie sfera  $S$  într-un *e-punct  $P$* , deci  $\rho$  induce o *rotație  $\tilde{\rho}$*  a modelului în jurul lui  $P$ . Rotația  $\tilde{\rho}$  este involutivă dacă unghiul lui  $\rho$  este de  $180^\circ$ ; atunci  $\tilde{\rho}$  este o *e-simetrie de centru  $P$* . Dar aceeași rotație  $\tilde{\rho}$  poate fi indusă și prin simetria față de planul polarei  $p$  a lui  $P$  și atunci  $\tilde{\rho}$  apare ca o *e-simetrie de axă  $p$* . Așadar orice *e-simetrie centrală* este și o *e-simetrie axială* și reciproc.



Fie acum  $\Gamma$  grupul mișcărilor modelului și  $\Delta$  mulțimea mișcărilor involutive. Se vede imediat că  $(\Gamma, \Delta)$  este un grup AGS, iar planul grupal corespunzător poate fi identificat cu modelul sferic. În acest exemplu  $\Delta = \Pi$  (dreptele coincid cu punctele) în opoziție cu planul absolut în care  $\Delta \cap \Pi = \emptyset$ .

#### § 4. CONSECINȚE ALE AXIOMELOR LUI BACHMANN

**Propoziția 1.** 1) O dreaptă  $a$  este o dreaptă fixă a simetriei  $\tilde{c}$  dacă și numai dacă  $a = c$  sau  $a \perp c$ .

2) Punctul  $A$  este fix la  $\tilde{c}$  dacă și numai dacă  $AIc$  sau  $A = c$ .

*Demonstrație.* 1) Avem

$$\tilde{c}(a) = a \Leftrightarrow cac = a \Leftrightarrow (ac)^2 = 1.$$

Dacă  $ac \neq 1$ , atunci  $ac \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $a \perp c$ ; iar dacă  $ac = 1$ , atunci  $a = c$ .

2)  $\tilde{c}(A) = A \Leftrightarrow cA \in \text{Inv } \Gamma$  sau  $A = c$ .

*Observație.* În cazul planului absolut egalitatea  $A = c$  nu este posibilă; în cazul planului eliptic orice punct  $A$  este și dreaptă.

**Propoziția 2.** Fie  $P$  un punct și  $a, b$  drepte. Avem  $P = ab$  dacă și numai dacă  $a \perp b$  și  $PIa, b$ .

*Demonstrație.* 1) Fie  $a \perp b$  și  $PIa, b$ . Atunci  $ab \in \text{Inv } \Gamma$  și  $ab \in \Pi$ ; pe altă parte  $a(ab) = b \in \text{Inv } \Gamma$  și  $b(ab) \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $ab \perp a, b$ . Cum și  $PIa, b$ , din **B1** rezultă că  $P = ab$ . 2) Fie  $P = ab$ ; atunci  $ab \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $a \perp b$ ; cum  $aP = b \in \text{Inv } \Gamma$ , avem  $PIa$  și analog  $PIb$ .

**Corolar.** Două drepte perpendiculare,  $a$  și  $b$ , sînt incidente cu un singur punct, cu  $ab$ .

**Propoziția 3.** 1) Oricare ar fi punctul  $A$  și dreapta  $a$ , există o dreaptă  $b$  astfel încît  $AIb$  și  $a \perp b$ .

2) Dreapta  $b$  este unică dacă și numai dacă  $A \neq a$ .

3) Dacă  $AIa$ , atunci  $A \neq a$  și  $b = Aa = aA$ .

*Demonstrație.* Următoarele trei cazuri sînt posibile:

i)  $AIa$ . Atunci  $A \neq a$ , căci  $a \cdot a = 1 \notin \text{Inv } \Gamma$ .  $A = ef$  și  $e, f, a \perp A$ , deci conform axiomei **B2**  $b := efa$  este o dreaptă. Din  $ba = ef = A \in \text{Inv } \Gamma$  rezultă că  $a \perp b$ , iar din  $bA = bba = a \in \text{Inv } \Gamma$  deducem că  $AIb$ . Dacă  $b'$  este o dreaptă cu  $a \perp b'$  și  $AIb'$ , atunci conform propoziției 2:  $A = b'a$ , deci  $b'a = ba$  și  $b' = b$ .

ii)  $A = a$ . Scriem  $A$  sub forma  $A = ef$ ; atunci  $ea = f \in \text{Inv } \Gamma$ ,  $af = e \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $a \perp e$ ,  $a \perp f$ ,  $AIae$ ,  $AIaf$ . Deoarece  $e \neq f$ , există mai multe drepte incidente cu  $A$  și perpendiculare pe  $a$ .

iii)  $(Aa)^2 \neq 1$ . Atunci  $A' := \tilde{a}(A) = aAa \neq A$ . Fie  $b := \overline{A, A'}$ . Deoarece  $A, A' \perp b$ , avem  $\tilde{a}(A)$ ,  $\tilde{a}(A') \perp \tilde{a}(b)$ , adică  $A', A \perp aba$ , deci  $\overline{A', A} = aba$ . Prin urmare  $(ba)^2 = 1$ . Dar  $b \neq a$  (căci  $A \perp b$  și non  $AIa$ ), deci  $ba \in \text{Inv } \Gamma$  și  $b \perp a$ . Dacă avem pentru dreapta  $b'$ :  $AIb'$ ,  $a \perp b'$ , atunci  $\tilde{a}(b') = b'$ ; se observă că  $\tilde{a}(A) \perp \tilde{a}(b)$ ,  $a(b')$ , deci  $A, A' \perp b, b'$ , ceea ce în virtutea lui **B1** implică  $b = b'$ .

**Corolar.** Oricare ar fi dreapta  $a$ , există cel puțin un punct incident cu  $a$ .

Într-adevăr, conform cu **B3**, există cel puțin un punct  $P$  (de exemplu  $gh$ ). Deci există în virtutea propoziției 3 o dreaptă  $b$  perpendiculară pe  $a$ ; dar atunci  $ab$  este incident cu  $a$ .

**Propoziția 4.** Dreptele  $a, b, c$  sînt perpendiculare două cîte două, dacă și numai dacă  $abc = 1$ .

*Demonstrație.* Fie  $a \perp b \perp c \perp a$ . Atunci  $ab$  este un punct și  $ab \perp a, b$ . Ținînd seama și de  $a, b \perp c$ ,  $a \neq b$ , propoziția 3,2) ne arată că  $ab = c$ , deci  $abc = 1$ . Reciproc, dacă  $abc = 1$ , atunci  $ab = c \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $a \perp b$  și analog  $b \perp c$ ,  $c \perp a$ .

Dacă  $abc = 1$ , mulțimea  $\{a, b, c\}$  se numește *triunghi polar*. Dacă  $(\Gamma, \Delta)$  are un triunghi polar, atunci planul grupal  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$  se numește *eliptic*.

**Propoziția 5.** Fie  $abc = d$ . Dacă  $a, b, c \perp A$ , atunci  $d \perp A$ ; dacă  $a, b, c \perp e$ , atunci  $d \perp e$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că  $a, b, c \perp A$ . Trebuie să arătăm că  $abcA = Aabc$  și  $abc \neq A$ . Prima relație rezultă din faptul că  $A$  este permutabil cu  $a, b$  și  $c$ . Dacă am avea  $abc = A$ , atunci din  $ab = Ac \in \text{Inv } \Gamma$  am deduce  $a \perp b$  și  $A = ab$ ; de aici ar urma  $Ac = abc = A$ , deci  $c = 1$ , ceea ce e fals. Lăsăm pe seama cititorului demonstrația celei de-a doua afirmații.

Propoziția 5 completează axioma **B2**. Propoziția următoare este o reciprocă a lui **B2**.

**Propoziția 6.** 1)  $a \neq b \wedge P I a, b \wedge abc = d \Rightarrow P I c$ .

2)  $a \neq b \wedge e \perp a, b \wedge abc = d \Rightarrow e \perp c$ .

*Demonstrație.* 1) Conform propoziției 3 există  $l \in \Delta$  cu  $PIl$  și  $l \perp a$ . Atunci  $lc = : Q \in \Pi$  și  $f := lba \in \Delta$  (în virtutea lui **B2**). Folosind propoziția 5, avem  $PIf$ . Pe de altă parte,  $Q = lc = lbaabc = fd$ ,



deci conform propoziției 2,  $QIf$  și astfel  $P, QIf, l$ . Rezultă  $P = Q$  sau  $f = l$ . În cazul al doilea din  $f = lba$  deducem  $a = b$ , ceea ce nu este posibil. Deci  $P = Q$  și  $PIc$ .

2) În virtutea corolarului de mai sus există  $P$  astfel ca  $PIc$ . Dacă  $P = e$ , atunci evident  $e \perp c$ . Fie în continuare  $P \neq e$  și  $c'$  perpendiculara din  $P$  pe  $e$ . Să presupunem  $c \neq c'$ . Conform axiomei **B2**  $d' := abc' \in \Delta$  și conform propoziției 5,  $d' \perp e$ . Deoarece  $cc'd' = cc'd'^{-1} = cc'e'ba = cba = d^{-1} = d$ ,  $PIc$ ,  $c'$  și  $c \neq c'$  din partea 1) a acestei propoziții rezultă că  $PI d'$ . Cum  $P \neq e$ ,  $PI d'$ ,  $c'$  și  $d'$ ,  $c' \perp e$ , folosind propoziția 3,2), obținem:  $d' = c'$ , de unde se deduce că  $a = b$  în contradicție cu ipoteza. Așadar  $c = c'$  și astfel  $e \perp c$ .

Fie  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta \cap \Pi$ . Următoarele relații vor juca un rol important în cele ce urmează:

$$(9) \quad \alpha\gamma\beta \in \Delta,$$

$$(10) \quad \alpha\beta\gamma \in \Pi.$$

**Propoziția 7.** Relațiile (9) și (10) sînt simetrice (rămîn valabile la orice permutare a lui  $\alpha, \beta, \gamma$ ) și reflexive (dacă două dintre elementele  $\alpha, \beta, \gamma$  sînt egale și a treia este o dreaptă în cazul (9) respectiv un punct în cazul (10), atunci relația are loc).

**Demonstrație.** Să admitem că relația (9) este adevărată. Atunci  $\gamma\beta\alpha = (\alpha\beta\gamma)^{-1} = \alpha\beta\gamma \in \Delta$  și  $\gamma\alpha\beta = \gamma(\alpha\beta\gamma)\gamma = \tilde{\gamma}(\alpha\beta\gamma) \in \Delta$ . Deoarece orice permutare a lui  $\alpha, \beta, \gamma$  se obține prin aplicarea succesivă a acestor două permutări, relația (9) este simetrică. Dacă  $\beta \in \Delta$  avem evident  $\alpha\alpha\beta \in \Delta$  și  $\beta\alpha\alpha \in \Delta$ , iar  $\alpha\beta\alpha = \alpha(\beta) \in \Delta$ , deci relația (9) este reflexivă. Aceeași demonstrație este valabilă și în cazul relației (10).

**Propoziția 8.** Relația  $AbC \in \Delta$  are loc dacă și numai dacă există o dreaptă  $d$  astfel încît  $A, CId$  și  $b \perp d$ .

**Demonstrație.** Cazul  $A = C$ . Atunci oricare ar fi  $b$  relația  $AbA \in \Delta$  este adevărată (conform propoziției 7) și de asemenea există  $d$  cu  $AId$ ,  $b \perp d$  (conform propoziției 3).

Cazul  $A \neq C$ . Fie  $d := \overline{AC}$ ,  $a := Ad$ ,  $c := dC$  (fig. 1). Atunci  $a \neq c$  (căci în caz contrar am avea  $Ad = Cd$  și  $A = C$ ) și

$$AbC \in \Delta \Leftrightarrow ACb \in \Delta \Leftrightarrow (ad)(dc)b \in \Delta \Leftrightarrow acb \in \Delta.$$

Ținînd cont de axioma **B2**, de propoziția 6,2) și de  $d \perp a, c$ , ultima relație este echivalentă cu  $b \perp d$ .

**Propoziția 9.** Relația  $aBc \in \Pi$  este adevărată dacă și numai dacă există  $d \in \Delta$  astfel încît  $a, c \perp d$  și  $BId$ .

**Demonstrația.** i) Să presupunem că  $aBc = P \in \Pi$ . Dacă  $BId$ , atunci notînd  $\bar{d} := aB$ , avem  $\bar{d} \in \Delta$ ,  $a, c \perp \bar{d}$  și  $BId$ . Să presupunem deci că  $B$  nu este incident cu  $a$  (fig. 2). Cum  $a = PcB$ , aplicînd

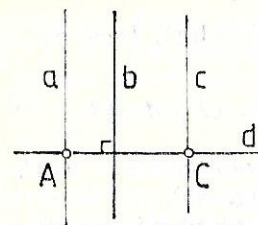


Fig. 83

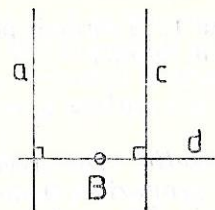


Fig. 84

propoziția 8 găsim o dreaptă  $d$  pentru care  $P, BId$ ,  $c \perp d$ . Prin urmare  $d$  este permutabil cu  $P, B, c$  și astfel  $da = d(PcB) = (PcB)d = ad$  și  $(ad)^2 = 1$ . Dar  $ad \neq 1$  (căci altfel ar rezulta  $BId$ ), deci  $a \perp d$ .

ii) Fie acum  $a, c \perp d$ ,  $BId$ . Notînd  $b := Bd$ , avem  $a, b, c \perp d$ , deci  $l := abc \in \Delta$  și  $l \perp d$ . Prin urmare putem scrie:  $aBc = abcd = abcd = ld \in \Pi$ .

## § 5. TEOREMA PERPENDICULARELOR ȘI APLICAȚIILE EI

Dacă  $a$  și  $b$  sînt două drepte distincte, mulțimea de drepte

$$[ab] := \{x \in \Delta | abx \in \Delta\}$$

se numește *fascicul (de drepte) cu baza a, b*. Relația  $abc \in \Delta$  se citește: „dreptele  $a, b, c$  aparțin unui fascicul”.

În cazul cînd  $a, b$  sînt drepte concurente în punctul  $P$ , axioma **B2** arată că orice dreaptă incidentă cu  $P$  aparține lui  $[ab]$ , iar teorema 6 arată că  $x \in [ab] \Rightarrow PIx$ . Așadar în acest caz  $[ab]$  este mulțimea dreptelor incidente cu  $P$ ; avem un *fascicul central*. Analog, dacă  $a, b$  au o perpendiculară comună  $d$ ,  $[ab]$  coincide cu mulțimea dreptelor perpendiculare pe  $d$  și se numește *fascicul ortogonal*. În planul euclidian două drepte distincte fie că sînt concurente, fie că au o perpendiculară comună, deci orice fascicul este central sau ortogonal. În planul eliptic fiecare fascicul este central. Dar, în general, un fascicul nu trebuie să fi central sau ortogonal.



Importanța relației de a aparține unui fascicul rezidă în faptul că multe teoreme euclidiene în care intervine concurența a trei drepte, se generalizează dacă înlocuim concurența prin apartenența la fascicul. Pentru a obține teoreme de acest fel avem nevoie de un criteriu de aparținere la fascicul. Acesta este dat de teorema următoare, stabilită de J. Hjelmslev:

**Teorema 1.** (Teorema perpendiculararelor). *Dacă  $aa' = A$ ,  $cc' = C$  și  $a'b'c' = d$ , atunci*

$$abc \in \Delta \Leftrightarrow \exists l \in \Delta : A, cIl, d \perp l.$$

*Demonstrație.* Deoarece  $abc = aa'a'bc'c' = AdC$ , teorema 1 rezultă din propoziția 9 de la § 4 (fig. 85).

*Observație.* În cazul particular al planului euclidian, când  $a$  și  $c$  și la fel  $a'$  și  $c'$  sînt concurente, teorema 1 rezultă ușor din proprietatea unghiurilor înscrise în cerc, căci în acest caz  $a'bc' = d$ , echivalent cu  $a'b = dc'$ , înseamnă că rotind  $a'$  pe  $b$ , dreapta  $d$  ia poziția lui  $c'$ .

**Teorema 2.** *Oricare ar fi fasciculul  $[ac]$  și punctul  $P$ , neincident simultan cu  $a$  și  $c$ , există în  $[ac]$  o dreaptă unică  $b$  incidentă cu  $P$ .*

*Demonstrație.* Fie  $a'$  și  $c'$  perpendiculare respectiv pe  $a$  și  $c$ , incidente cu  $P$  (care există în virtutea propoziției 3) și  $A := aa'$ ,  $C := cc'$ , iar  $l$  o dreaptă incidentă cu  $A$  și  $C$  (fig. 4). Fie  $d$  o dreaptă incidentă cu  $P$ , perpendiculară pe  $l$ . Conform axiomei B2  $b := a'dc' \in \Delta$  și conform propoziției 5,  $P Ib$ . Avem  $d = a'bc'$  și din teorema 1 rezultă că  $abc \in \Delta$ , deci  $b \in [ac]$ .

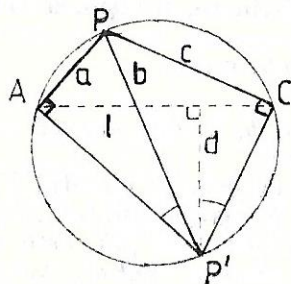


Fig. 85

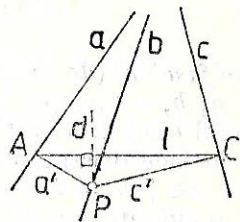


Fig. 86

Pentru a demonstra unicitatea, să stabilim mai întâi că  $P \neq l$ . Presupunând  $P = l$ , avem  $a', c' \perp l$  și deoarece prin  $A$  (incident cu  $a'$ ) există o singură perpendiculară pe  $a'$ , rezultă  $a = l$  și analog  $c = l$ , ceea ce este fals, căci  $a \neq c$ . Presupunem că  $b_1 \in [ac]$  și  $P Ib_1$ .

Conform teoremei 1 dreptele  $a'bc'$  și  $a'b_1c'$  sînt perpendiculare pe  $l$  și sînt incidente cu  $P$ . Cum  $P \neq l$ , din propoziția 3 deducem că  $a'bc' = a'b_1c'$ , deci  $b = b_1$ .

**Teorema 3.** (teorema de reducere). *Un produs de un număr par respectiv impar de drepte se poate scrie totdeauna sub forma  $aB$  respectiv  $aB$  (și  $Ab$ ).*

*Demonstrație.* i) Fiind date dreptele  $e, f$  și punctul  $P$ , există  $a, b \in \Delta$  cu  $efP = ab$ . Într-adevăr, dacă  $e = f$  afirmația este evidentă. Dacă  $e \neq f$ , putem determina în virtutea teoremei 2 dreapta  $g \in [ef]$  astfel ca  $PIg$ . Atunci  $b := gP \in \Delta$ ,  $a := efg \in \Delta$  și  $efP = (efg)(gP) = ab$ .

ii) Oricare ar fi dreptele  $e, f, g$  există  $a \in \Delta$  și  $B \in \Pi$  pentru care  $efg = aB$ . Într-adevăr, putem presupune că  $f \neq g$  (fig. 5). Știm că există  $E I e$  și  $e' \in [fg]$ ,  $E I e'$ ; atunci  $h := e'fg \in \Delta$ . Fie  $l$  o perpendiculară pe  $h$ , incidentă cu  $E$ ,  $B := lh \in \Pi$  și  $a := ee'l \in \Delta$ . Rezultă  $efg = (ee'l)l(e'fg) = alh = aB$ .

iii) Un produs  $efgh$  se poate scrie conform cu ii) sub forma  $ejB$  și apoi conform cu i) sub forma  $ab$ . Aplicînd repetat acest procedeu, orice produs de un număr par de drepte se poate scrie ca un produs de două drepte. Dar atunci orice produs impar de drepte ia forma  $efg$ , care apoi se transformă cu procedeul ii) în forma  $aB$ . Printr-o ușoară modificare a construcției ii)  $aB$  poate fi adus la forma  $Ab$ .

**Corolar.** *Orice element al lui  $\Gamma$  este egal cu un produs de două elemente involutive.*

Elementele lui  $\Gamma$  de forma  $aB$  pot fi scrise și ca  $abc$  cu  $a, b \perp c$ . Într-adevăr, dacă  $c \perp a$ ,  $B I c$  și  $b \perp c$ ,  $B I b$ , atunci  $B = bc$ . Mișcarea  $\widetilde{aB}$  se numește *simetrie cu alunecare*. Dacă  $aB \neq 1$ , există o perpendiculară unică pe  $a$ , incidentă cu  $B$ , numită *axa* lui  $aB$ .

**Teorema 4.**  $\text{Inv } \Gamma = \Delta \cup \Pi$ .

*Demonstrație.* Fie  $\alpha \in \text{Inv } \Gamma$ . Dacă  $\alpha = ab$ , atunci conform definiției  $\alpha$  este un punct. Dacă  $\alpha = aB$ , atunci  $aIB$  și conform propoziției 3 de la § 4,  $aB$  coincide cu perpendiculara pe  $a$ , incidentă cu  $B$ .

**Corolar.** *Centrul grupului  $\Gamma$  este egal cu  $\{1\}$ .*

Într-adevăr, fie  $\gamma$  un element al centrului. Putem scrie  $\gamma = \alpha\beta$ , unde  $\alpha, \beta \in \text{Inv } \Gamma$ , deci  $(\alpha\beta)^2 = (\alpha\beta) \cdot \alpha \cdot \beta = \alpha(\alpha\beta)\beta = (\alpha\alpha)(\beta\beta) = 1$ . Deci  $\gamma = 1$  sau  $\gamma \in \text{Inv } \Gamma$ . În cazul al doilea  $\gamma$  este o dreaptă  $a$  sau un punct  $A$ ; dar conform cu B3 există  $B$  neincident cu  $a$  respectiv  $b$

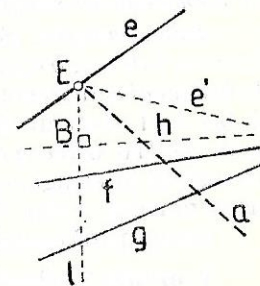


Fig. 87



neincident cu  $A$ ; rezultă că  $aB \neq Ba$  respectiv  $Ab \neq bB$ , deci nici  $a$  și nici  $B$  nu pot să aparțină centrului. Prin urmare numai cazul  $\gamma = 1$  este posibil.

**Teorema 5.** *Există un izomorfism al grupului  $\Gamma$  pe grupul de transformări  $\tilde{\Gamma}$  la care imaginea lui  $\Delta$  este  $\tilde{\Delta}$  (structurile  $(\Gamma, \Delta)$  și  $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta})$  sînt izomorfe).*

*Demonstrație.* Se observă că aplicația  $\varphi: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$  definită prin  $\varphi(\alpha) = \alpha$  este morfism surjectiv de grupuri. Nucleul lui  $\varphi$  este

$\text{Ker } \varphi = \{\gamma \mid \tilde{\gamma} = \text{trans. ident.}\} = \{\gamma \mid \forall \xi: \gamma\xi\gamma^{-1} = \xi\}$ ,  
deci  $\text{Ker } \varphi$  coincide cu centrul lui  $\Gamma$ . Din corolarul de mai sus rezultă  $\text{Ker } \varphi = \{1\}$ , deci  $\varphi$  este un izomorfism. Avem prin definiție  $\varphi(\Delta) = \tilde{\Delta}$ .

**Teorema 6.** *Dacă  $(\Gamma, \Delta)$  este eliptic, atunci i) orice  $\gamma \in \Gamma$  poate fi scris ca  $ab$ ; ii)  $\Delta = \Pi$ ; iii) oricare două drepte sînt incidente cu un punct.*

*Demonstrație.* i)  $(\Gamma, \Delta)$  fiind eliptic există  $a_0, b_0, c_0 \in \Delta$  astfel încît  $a_0b_0c_0 = 1$ . Dacă  $\gamma \in \Gamma$  este de forma  $\gamma = efg$ , atunci  $\gamma = efga_0b_0c_0$  și conform teoremei de reducere  $\gamma$  este un produs de două drepte. Deci toate elementele lui  $\Gamma$  au forma  $ab$ . ii) În particular orice dreaptă  $d$  se poate scrie ca  $d = l \cdot m$  și deoarece  $lm \in \text{Inv } \Gamma$ ,  $d \in \Pi$ . Reciproc, fie  $P = a_1b_1$  un punct oarecare; am văzut că  $a_1$  este un punct și cum  $a_1b_1 \in \text{Inv } \Gamma$ ,  $a_1lb_1$ , deci există  $c_1$  astfel ca  $a_1 = c_1b_1$ . Obținem în sfîrșit  $P = c_1b_1b_1 = c_1 \in \Delta$ . iii) Este suficient să considerăm două drepte distincte,  $a$  și  $b$ . Cum  $a, b$  sînt și puncte, există dreapta  $c := \overline{a, b}$  și  $a, b \in c$ . Cum  $c$  este și punct, teorema este demonstrată.

**Teorema 7.** *Dacă  $(\Gamma, \Delta)$  nu este eliptic, atunci elementele de forma  $ab$  formează un subgrup normal în  $\Gamma$  de indice 2 și  $\Pi \cap \Delta = \emptyset$ .*

*Demonstrație.* Se observă cu ajutorul teoremei de reducere că  $\Delta\Delta := \{ab \mid a, b \in \Delta\}$  este un subgrup al lui  $\Gamma$ . Nici un element de forma  $abc$  nu aparține la  $\Delta\Delta$ , căci din  $abc = ef$  rezultă  $f = eabc = gh$  și  $fgh = 1$  contrar ipotezei. Prin urmare  $\Delta\Delta \cap \Delta\Delta\Delta = \emptyset$ . Se vede ușor pentru orice  $a \in \Delta$  avem  $a\Delta\Delta = \Delta\Delta\Delta$ , deci  $\Delta\Delta$  are două clase de resturi la stînga:  $\Delta\Delta$  și  $\Delta\Delta\Delta$ , de unde rezultă că  $\Delta\Delta$  este un subgrup normal. Cum  $\Pi \subset \Delta\Delta$  și  $\Delta \subset \Delta\Delta\Delta$ , avem  $\Pi \cap \Delta = \emptyset$ .

Dăm următoarele două teoreme fără demonstrație:

**Teorema 8.** *Dacă dreptele distincte  $c$  și  $d$  aparțin fasciculului  $[ab]$ , atunci  $[ab] = [cd]$ .*

**Teorema 9.** *Dacă  $(abc)^2 \neq 1$ ,  $c \in [bc]$ ,  $e \perp a$ ,  $f \in [ca]$ ,  $f \perp b$ ,  $g \in [ab]$ ,  $g \perp c$ , atunci dreptele  $e, f, g$  aparțin unui fascicul.*

Încheiem această introducere în geometria planului grupal cu următoarele observații: 1) Există teorema care generalizează concu-

rența mediatoarelor, bisectoarelor respectiv a medianelor unui triunghi așa cum teorema 9 generalizează proprietatea de concurență a înălțimilor unui triunghi. 2) Din teorema 6 rezultă că planul grupal eliptic este un plan proiectiv. 3) Dacă planul grupal nu este eliptic și are proprietatea că pentru  $A$  și  $a$  neincidente, există cel mult două drepte incidente cu  $A$ , care nu sînt secante cu  $a$  și nici nu au o perpendiculară comună cu  $a$ , atunci el se numește „plan grupal hiperbolic” și este o generalizare a planului hiperbolic clasic. Se poate demonstra că un plan grupal hiperbolic  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$  poate fi scufundat într-un plan proiectiv, punctele acestuia din urmă fiind fasciculele de drepte ale lui  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$ , (fasciculele centrale se identifică cu centrele lor), iar la dreptele lui  $\mathcal{P}(\Gamma, \Delta)$  se adaugă doar o singură dreaptă improprie. 4) Un plan grupal se numește „euclidian” dacă există un „dreptunghi” adică patru drepte distincte  $a, b, c, d$  astfel încît  $a, b \perp c, d$ ; el generalizează planul euclidian clasic.



## CONCEPTUL DE GEOMETRIE. NECESITATEA AXIOMATIZĂRII GEOMETRIEI\*)

Scoala românească este confruntată actualmente cu una dintre problemele esențiale ale învățămîntului: modernizarea conținutului și metodelor de predare.

Se caută mereu soluții de actualizare a fiecărei discipline, alcătuind programe noi, manuale noi, operație care se face de cele mai multe ori în pripă, fără o cercetare temeinică a compatibilității conținutului și formelor noi cu specificul unui învățămînt care are acum o tradiție de aproape 200 de ani.

Matematica, mai mult ca celelalte discipline intră în miezul acestor frământări. Iar în cadrul ei, geometria pune cele mai multe probleme. Dar acest lucru este firesc, devreme ce aritmetica, algebra sau analiza studiază niște structuri matematice simple, fondate pe un număr relativ mic de concepte, dezvoltate prin metode care uneori, la clasele mari, pot fi făcute accesibile datorită pregătirii anterioare.

Geometria însă are o structură complicată, greu de prezentat riguros copiilor din treptele I și II ale școlii de masă. Acesta este motivul pentru care, un renumit matematician contemporan, René Thom, laureat al premiului Field, afirma că: „geometria nu poate fi prezentată și riguros și elementar”. Într-adevăr, experiența arată că geometria este privită în mod subiectiv ca disciplină de nivel elementar. În realitate ea nu poate fi edificată decît prin mijloace neelementare și, ca atare, o prezentare modernă nu poate fi făcută la nivelul liceului. Se caută atunci soluții de compromis, adoptîndu-se calea descriptivă a expunerii geometriei în școală.

Noțiunea generală de geometrie nu este simplu de definit. Afirmația profesorului Vrănceanu: „Geometria este știința spațiului în care trăim” nu poate caracteriza geometria nici măcar în cadrul științelor matematice. Cel mai general concept și, desigur, cel actual este: „Geometria este studiul categoriei varietăților diferențiabile”.

\*) Conferință prezentată de Prof. dr. doc. Radu Miron la a XII-a Conferință națională de geometrie — Bușteni, 1981.

Cît de mult înțelege un nematematician din această formulare este greu de spus. Din acest motiv ne limităm numai la geometria euclidiană. Euclid și-a definit geometria ca teoria neformalizată a sistemului axiomatic expus în „Elemente”.

Dar matematica secolului XX este, aproape în exclusivitate, o teorie deductivă semiformalizată, în care conținutul specific este formalizat, iar partea logică este logica bunului simț matematic, neformalizată.

Definiția lui Hilbert a noțiunii de geometrie euclidiană, aceasta fiind concepută ca teoria axiomatică semiformalizată, bazată pe cele 20 de axiome cunoscute, este una dintre cele mai actuale. Sistemul axiomatic al lui Hilbert are trei noțiuni primare: punct, dreaptă, plan. El are patru relații primare: a aparține, a fi între, congruența segmentelor și congruența unghiurilor. Axiomele sînt împărțite în cinci grupe și prezentate gradat într-un mod natural. Cu toate acestea predarea geometriei în liceu pe calea urmată de Hilbert nu este deloc indicată. Motivul: Elevii nu sînt pregătiți, nici măcar psihologic, pentru a suporta rigorile unei axiomatici de o asemenea dimensiune, care copleșește prin concizia și logica raționamentelor, prin gradul înalt de abstractizare.

Să mai remarcăm că Hilbert a avut în vedere surprinderea părții comune geometriilor euclidiene și neeuclidiene în ceea ce se numește geometria absolută. Or, această calitate a axiomaticii sale sporește gradul de dificultate în înțelegerea esențialului din geometria euclidiană. Dar geometria lui Hilbert are și avantaje:

- asigură maximum de rigoare în edificarea geometriei;
- sistemul de axiome este necontradictoriu, consistent, complet și categoric.

Din acest motiv geometria sa euclidiană se prezintă ca un edificiu monumental, care însă nu se poate realiza cu elevii de liceu.

Se poate trage concluzia că, bazat pe sistemul axiomatic al lui Hilbert, conceptul de geometrie euclidiană este de maximă claritate. Și, încă ceva, deloc neglijabil. Definiția sa nu apelează la elemente exterioare ale geometriei cum ar fi de exemplu numărul real sau teoria mulțimilor.

Există și alte modalități, mai mult sau mai puțin sofisticate, de a defini ideea de geometrie euclidiană. Cităm cu titlu de informare definiția lui Felix Klein: „Geometria euclidiană este studiul figurilor și proprietăților lor invariante la transformările grupului izometriilor”. Mi-ar fi greu să explicitez această definiție, care urmează calea programului de la Erlangen.



Dacă se renunță la pretenția de „puritate” a geometriei euclidiene, atunci ea poate fi prezentată drept construcție semiformalizată în multe moduri. Două sînt cele mai răspindite. Unul datorat lui Birkhoff și celălalt lui H. Weyl. Din primul punct de vedere geometria euclidiană este teoria axiomatică a unei structuri matematice, determinată de o mulțime de puncte în care s-au selectat două familii de submulțimi, elementele primei familii fiind numite drepte, iar ale celei de-a doua familii plane. Cîmpul numerelor reale cu toate proprietățile sale, în special cele de ordine și completitudine, este presupus cunoscut. Se dau apoi grupele de axiome care postulează proprietățile de apartenență. În continuare se introduce noțiunea de distanță, care implică faptul că fiecare dreaptă are același cardinal cu mulțimea numerelor reale. În fine se formulează axiomele de congruență și axioma paralelor.

O variantă a acestui punct de vedere este dat de axiomaticele lui Choquet, expusă într-un mod clar și detaliat în cărțile profesorului A. Haimovici.

Punctul de vedere al lui Weyl constă în definirea noțiunii de geometrie euclidiană ca teoria axiomatică a unei structuri matematice dată de o mulțime de puncte pe care se pot defini vectorii cu ajutorul unei relații de echivalență. Mulțimea numerelor reale fiind cunoscută, se formulează axiomele de legătură dintre perechile de puncte și vectori, produsul dintre scalari și vectori și produsul scalar. Deși construcția este simplă ea nu poate fi urmărită lesne de un elev, chiar bun. Motivul rezidă în utilizarea sistematică a noțiunii de spațiu liniar peste cîmpul numerelor reale, care, mi se pare, nu mai este introdusă în liceu.

În afara acestor două definiții evasigeometrice mai există una remarcabilă, negeometrică.

În adevăr, putem defini geometria euclidiană ca studiul perechii  $E_3 = (\mathbf{R}^3, d)$ , în care  $d$  este distanța pitagoreică în  $\mathbf{R}^3$ .

Sigur această definiție presupune cunoscut corpul numerelor reale și proprietățile topologice ale spațiului  $\mathbf{R}^3$ . Dar ea arată clar complexitatea geometriei euclidiene. Anume, avem de cercetat pentru  $E_3$ :

- proprietățile algebrice legate de structura de spațiu real;
- proprietățile topologice;
- figurile importante; invarianța lor la schimbările de repere ortonormate;
- stabilirea proprietăților spațiului invariante la transformările grupului izometrilor etc.

Acest model analitic este foarte potrivit pentru studiul geometriei euclidiene, dar el nu poate fi prezentat decît parțial și numai în clasele

mari de liceu. Se pune însă întrebarea: trebuie predată geometria euclidiană în acest mod? Categorie nu. Geometria analitică trebuie predată elevilor, dar în cu totul altă concepție, presupunînd cunoscută geometria euclidiană.

Fără a o baza pe intuiție, geometria are totuși caracter intuitiv. Se pare că ideea de figură, figurile elementare: cercul, triunghiul, sfera etc., formate în practica milenară a omului, fac parte din zestrea informațională a celulei nervoase, sînt transmise ereditar și dau o mare mobilitate intuiției.

Dar materialul faptic intuitiv nu poate fi prins în concepte matematice, decît într-un sistem deductiv, suficient de bine formalizat, care să nu aibe fisuri logice. Or, aceasta nu se poate face, pentru lumea destul de complicată a geometriei, decît axiomatic.

Rămîne să găsim însă o construcție axiomatică, desigur necontradictorie, dar completă a geometriei euclidiene, acceptabilă nevoilor învățămîntului mediu. Și aici tradiția învățămîntului nostru are un cuvînt greu.

S-ar putea merge pe calea unei imbinări între punctele de vedere ale lui Hilbert, Birkhoff și Weyl, aducînd axioma paralelelor mai aproape de axiomele de apartenență și renunțînd în mod deliberat la chestiunile delicate de teorie sau de metateorie. Experiența, viața vor arăta calea cea mai potrivită. Rămîne însă, certitudinea că geometria în școala contemporană trebuie predată axiomatic.



# LIMITE ALE AXIOMATICII GEOMETRIEI

Conf. dr. Dan Brânzei

Există câteva propoziții referitoare la istoria geometriei ce aparțin culturii generale contemporane; merită să reținem atenția asupra citorva ce le rezumăm aici.

- $C_0$  — Geometria a apărut din *necesități practice*.
- $C_1$  — După ce și-a dovedit utilitatea practică, geometria s-a constituit treptat în sistem *logico-deductiv neformalizat*.
- $C_2$  — Construcția lui Euclid constituie o *culme a civilizației umane* și nu doar al geometriei<sup>1)</sup>.
- $C_3$  — Până pe la anii 1800 geometria s-a învățat în lumea largă după cărți ce difereau doar în mod neesențial de *Elementele lui Euclid*.
- $C_4$  — Marele salt calitativ al geometriei, crearea de către Lobacevski (1829) și Bolyai (1831) a *geometriei neeuclidiene*, a fost:
  - a) prilejuit de axiomatizarea neformalizată a lui Euclid,
  - b) strict anterior formulării de către Hilbert (1899) a unei axiomatice semiformalizate,
  - c) independent de necesități practice,
  - d) premisă pentru apariția teoriei relativității restrinse a lui Einstein (1905), ce constituie fondul unor remarcabile concluzii practice.
- $C_5$  — David Hilbert (1899) a oferit geometriei o temelie monumentală, un sistem axiomatic semiformalizat, capabil să înfrunte secolele.
- $C_6$  — După Hilbert au apărut peste o sută de axiomatizări ale geometriei dintre care aproximativ jumătate se pretind mai accesibile (Birkhoff, Choquet) iar altă jumătate îi rafinează structura logică (Bachmann, Förder, Barbilian).

<sup>1)</sup> „Noi venerăm Grecia antică drept leagăn al culturii... Acolo lumea a asistat pentru prima oară la miracolul unui sistem logic în care pași se succed cu o asemenea precizie încât propozițiile lui apăreau ca absolut indubitabile — am în vedere geometria lui Euclid. Acest admirabil triumf al rațiunii a dat intelectului uman încrederea în forțele proprii necesară pentru realizările ulterioare. Și dacă în tinerețe Euclid n-a izbutit să te entuziasmeze înseamnă că nu te-ai născut să devii teoretician în știință”. A. Einstein, *Essays in Science, Philosophical Library*, New York, 1934, p. 13.

Aceste propoziții de cultură generală contemporană demonstrează o legătură indisolubilă între geometrie și axiomatizările ei ce *trebuie* să se manifeste și în didactica geometriei contemporane. În 1972 un simpozion UNESCO analizând posibilitățile realizării practice a acestei necesități a evidențiat o concluzie cu caracter predominant psihologic ce o rezumăm prin:

— Capacitatea de a minui *eficient* raționamente logice abstracte apare la adolescenți relativ târziu, la o vîrstă suficient de bine încadrată de intervalul 17—22 ani.

Drept consecință logică a propozițiilor  $C_0$ — $C_6$  și P se desprinde următoarea propoziție ce rezumă nota:

În liceu nu se învață geometria pe baza unor axiome ci se asimilează metoda axiomatică pe baza studiului geometriei.

Această propoziție exprimă nu doar „ce e bine” ci și „ce se poate”.

A studia cu elevii geometria înseamnă a le oferi un *motor* care, alimentat cu fantezia și entuziasmul vîrstei lor, să dezvolte viteze supersonice. Un astfel de motor poate însă deveni util în practică numai dacă îi este asociată o *frînă* rațională pentru a se asigura că fantezia nu ne îndepărtează periculos de realitate.

Afirmăm deci că geometria trebuie și poate fi studiată *paralel* cu o axiomatizare a sa. Elevul trebuie să știe intuitiv (din gimnaziu) ce este o dreaptă, un cerc, un triunghi etc. Mai trebuie să accepte drept logice și firești câteva „axiome” și să observe treptat că aceste axiome sînt suficiente pentru a *demonstra* afirmații geometrice al căror adevăr îl simțise.

Pentru un procentaj covârșitor de elevi cazul LLL de congruență a triunghiurilor trebuie să fie evident. Demonstrația acestei teoreme nu o face pentru elev mai veridică ci constituie „proba cu martori” al unui adevăr de care el nu se îndoia.

Această atitudine a elevului este cît se poate de firească. Trebuie să admitem că este mai puțin firească deprinderea noastră a matematicienilor de a accepta un adevăr evident numai după ce l-am dedus (pe o cale adesea laborioasă și întortocheată) din adevăruri poate mai puțin evidente dar acceptate ca „axiome”. Căci cazul LLL nu este *a priori* mai puțin evident decît *axioma riglei* sau *axioma LUL*.

Nu poate fi blamat elevul care nu a priceput singur că profesorul gîndește astfel despre adevăr în geometrie; profesorul trebuie să știe să întemeieze această concepție asupra adevărului pe convingerile elevului!



Efortul de axiomatizare are deci drept componentă didactică centrală crearea unei toleranțe spre o nouă modalitate de acceptare a adevărului. Diverse specializări contemporane se disting prin modalități specifice de aproximare a adevărului obiectiv. Modalitatea specifică matematicii, raționamentul logico-deductiv, este poate cea mai răspândită și cel mai ușor de explicat și însușit. Toleranța spre o anume modalitate de apropiere de adevăr îi va fi elevului utilă chiar dacă, devenit între timp tehnician sau medic, chimist sau jurist, istoric sau fizician, artist sau economist, factor de decizie sau de execuție, își va fi însușit o altă modalitate concretă de a distinge drept esențiale anumite aspecte și implicații din realitatea obiectivă.

În geometrie, memorarea axiomelor și demonstrațiilor are un rol secundar, complet subordonat înțelegerii exigențelor specifice acestui tip de raționament. Este de dorit desigur ca la sfârșitul clasei a X-a elevul să știe însă cel puțin geometria ce o știuse la începutul clasei a IX-a; altfel capacitatea sa crescândă de a raționa abstract se poate diminua prin lipsa materiei prime de prelucrat!

Atenție! geometria este poate cea mai frumoasă jucărie ce o oferim adolescenților. Ea poate însă deveni o sperietoare dacă facem eforturi ce par meschine de a o înghesui într-un pat al lui Procust al unui sistem axiomatic. Jocul „geometria” are cel mult 20 de reguli (dacă acceptăm „regulamentul” lui Hilbert) deci, principial, este mai simplu decât fotbalul sau baschetul de exemplu.

Dorim însă să precizăm poziția noastră. Nu sîntem împotriva elementelor de axiomatică din manuale și din programă. Sîntem doar împotriva conceperii acestor elemente drept o bază a studiului, mai ales atunci cînd știm că elevii posedă în principiu o intuiție și o fantezie debordantă.

Elementele de axiomatică vor constitui deci nu temelia ci un vîrf al piramidei geometrice și trebuie să acceptăm că unii elevi nu vor ajunge în timpul școlii la acest vîrf. Trebuie remarcat însă că examenele de treaptă, de bacalaureat, de admiteri în facultăți și adesea nici olimpiadele matematice nu solicită cunoștințe de axiomatică ci, doar manevrarea raționamentului deductiv.

Am asemui acum geometria cu o pilnie ce se lărgeste accelerat. (În treacăt fie spus o astfel de pilnie ar reprezenta pseudosfera și precizarea proprietăților neeuclidiene a geometriei unei astfel de suprafețe trebuie să se includă în cultura generală a secolului XX.)

Un sistem axiomatic se plasează în mod fortuit în partea de jos a pilniei și partea cea mai dificilă a geometriei este în general obținerea primelor consecințe ale axiomelor. Hotărîrea de a aborda geo-

metria pe baza unui sistem axiomatic se transpune în cadrul acestei figurări prin intenția ce ni se pare absurdă de a învăța să mergem pe pante de  $90^\circ$  pentru a ajunge cu vremea să fim capabili să umblăm pe un teren de pantă practic nulă.

Am figurat pe pseudosferă nivelul  $P$  al teoremei lui Pitagora, nivelul  $H$  al axiomaticii lui Hilbert și nivelul  $B$  al axiomaticii lui Birkhoff. Apreciem că diferența de nivel și de pantă între  $H$  și  $B$  este sesizabilă dar nu semnificativă. Alegerea între  $H$  și  $B$  comportă deci discuții și opțiuni: avantajul didactic al lui  $B$  este comparabil cu avantajul lui  $H$  de a ocupa o poziție mai centrală în cultura geometrică.

Geometria se aplică în practică aproape exclusiv prin propoziții al căror nivel depășește pe cel al teoremei lui Pitagora  $P$ .

Ne permitem să comparăm învățarea geometriei cu o ascensiune a unui alpinist prin interiorul pseudosferei. A gândi o axiomatică  $H$  sau  $B$  neformalizată revine la a permite alpinistului să se asigure mereu cu corzi pitonate la nivele comparabile cu  $P$ . Dacă vrem ca o astfel de axiomatică  $H$  sau  $B$  să fie semiformalizată renunțăm la aceste corzi ce simbolizează aici sprijinirea pe intuiție. Avînd însă în vedere că manualele de liceu pentru geometrie au adoptat axiomatici semiformalizate îi revine profesorului de matematică rolul de „cap de coardă”. El trebuie să-și cunoască bine elevii („secunzii” săi) pentru a putea alege cele mai avantajoase poziții de asigurare a corzii intuiției, și locuri de regroupare comode care să ofere priveliști panoramice ale drumului parcurs și a celor ce mai urmează a fi făcute.

Privim însă studiul geometriei nu ca o ascensiune liniară ci ca o succesiune de excursii pe versantele pitorești ale geometriei. Această metaforă exprimă în fapt preconizarea paralelismului între geometrie și axiomatică. Prin aceste excursii consecutive elevul va învăța treptat cum să se asigure intuitiv.

Vor exista unii elevi cu aptitudini matematice (și geometrice) deosebite care vor reuși cu vremea să realizeze un salt calitativ în conceperea geometriei. Pentru aceștia geometria ar apare tot

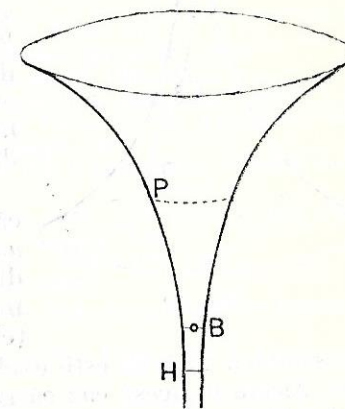


Fig. 88



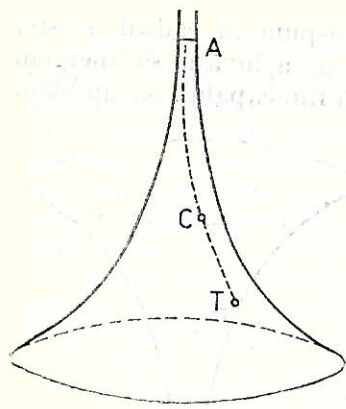


Fig. 89

ca o pseudosferă așezată însă acum ca în figura 89. Demonstrarea unei afirmații geometrice  $T$  revine la găsirea unui drum de coborîre de la o axiomatică  $A$  la propoziția  $T$ . În fapt el va căuta un drum de la o consecință  $C$  a axiomelor  $A$  la  $T$  deoarece drumul de la  $A$  la  $C$  îl consideră cunoscut. Alegerea consecinței  $C$  se va face însă în principiu tot pe pseudosfera din figura 88, asigurându-se intuitiv.

Vom spune desigur despre acest elev că știe *geometrie* și știe să folosească *metoda axiomatică*. Este posibil ca din memoria sa, după o vreme, să dispară o parte din axiomatica  $A$  și o bună parte din consecințele  $C$ . Zicem că elevul a uitat geometria.

Considerăm însă că este exclus să uite în ce constă metoda axiomatică. Zicem în acest caz că geometria și-a realizat complet rolul *formativ* fără a-l fi realizat și pe cel *informativ*. Pierderea nu este importantă pentru că acest (fost) elev va răsfosi manualul și își va aminti ușor ce a uitat despre  $A$  sau  $C$ .

## BIBLIOGRAFIE

1. Abramescu, Nicolae, *Introducere elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene*. Universitatea Cluj, 1926.
2. Artin, Emil, *Geometrie Algebra*. Interscience, New York, 1957.
3. Barbilian, Dan, *Grupuri cu operatori*. Ed. Academiei, București, 1960.
4. —, *Opera didactică* (vol. I și III). Ed. tehnică, București, 1963, 1974.
5. Becker, Oscar, *Fundamentele matematicii*. Ed. științifică, București, 1968.
6. Blumenthal, L. M., *A Modern View of Geometry*. Freeman, San Francisco, 1961.
7. Bolyai, János, Appendix. Ed. Academiei, București, 1951.
8. Borș, Constantin, *Noțiuni de geometrie proiectivă*. Ed. tehnică, (Bibl. SSMF), București, 1956.
9. Brânzei, Dan, *Fundamentele matematicii structurale*. Univ. „Al. I. Cuza” Iași, 1976.
10. —, *Geometrie circumstanțială*. Va apărea la Ed. Junimea, Iași.
11. —, *Introducere în geometrie*. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1977—1982.
12. —, *Modele geometrice*. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1982.
13. —, *On some Categories of Miron Spaces*. Lucr. Conf. Nat. de geometrie și topologie, Timișoara, 28—30 aprilie, 1977.
14. —, *Structures affines et opérations ternaires*. An. științifice, Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, **XXIII** (1977), s. I-a, 1, 33—38.
15. Brânzei, Dan ș.a., *Bazele raționamentului geometric*. Ed. Academiei, București, 1983.
16. Brânzei, Dan ș.a., *Geometrie și trigonometrie*. (Va apărea, E.D.P., București).
17. Câmpian, Florica, *Aventura geometriilor neeuclidiene*. Ed. Albatros, București, 1978.
18. —, *Bolyai*. Ed. Albatros, București, 1971.
19. Cohen, I. P., *The Independence of the Continuum Hypothesis*. Proc. of the Nat. Acad. of Sci., **50** (1963), 1143—1148 și **51** (1964), 105—110.
20. Courant, Richard și Robbins, Herbert, *Ce este matematica?* Ed. științifică, București, 1969.
21. Coța, Augustin ș.a., *Matematică. Geometrie și trigonometrie*. (Manuale pentru clasele IX și X). E.D.P., București, 1981—1982.
22. Craioveanu, Mircea și Albu, Ion Doru, *O introducere algebrică în geometrie sub forma unor exerciții* (2 volume.) Universitatea Timișoara, 1975—1976. (*Geometrie afină și euclidiană*. Ed. Facla, Timișoara, 1982).
23. Creangă, Ion ș.a., *Curs de geometrie analitică*. Ed. tehnică, București, 1959.
24. Creangă, Ion ș.a., *Introducere în teoria numerelor*. E.D.P., București, 1965.
25. Creangă, Ion, ș.a., *Algebră liniară*. E.D.P., București, 1962.
26. Cruceanu, Vasile, *Elemente de algebră liniară și geometrie analitică*. E.D.P., București, 1973.
27. Dieudonné, Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Herman, Paris, 1964.
28. Dragomir, P. și A., *Structuri algebrice*. Ed. Facla, Timișoara, 1975.
29. Efimov, N. V., *Geometrie superioară*. Ed. tehnică, București, 1952 sau *Géométrie supérieure*, Ed. Paix, Moscova, 1982.
30. Ewald, Günter, *Geometry. An Introduction*. Wadsworth Publ. Comp. Bel. mont, California, 1971.
31. Félix, Lucienne, *Expunere modernă a matematicii elementare*. Ed. științifică, București, 1973.
32. Forder, H. G., *Fundamentele geometriei euclidiene*. Ed. științifică, București, 1970.
33. Frege, Gottlob, *Serieri logico-filosofice*. (I — *Fundamentele aritmeticii*). Ed. științifică și enciclopedică, București, 1977.
34. Galbură, Gheorghe, *Algebra*. E.D.P., București, 1972.
35. —, *Curs de geometrie*. Univ. „G. I. Parhon”, București, 1973.



36. Galbură, Gheorghe ș.a., *Curs de geometrie analitică în spațiu*. Tipografia și litografia învățămîntului, București, 1957.
37. Galbură, Gheorghe și Radó, Francisc, *Geometrie*. E.D.P., București, 1979.
38. Gautier, C. ș.a., *Ale<sub>0</sub>-Algebră*. Numere întregi; Numere reale, calcul numeric, numere complexe. E.D.P., București, 1974.
39. —, *Ale<sub>0</sub>-Geometrie*. Elemente de geometrie afină și euclidiană. E.D.P., București, 1974.
40. Gergely, E., *Ipotezele care stau la baza geometriei de B. Riemann*. Ed. tehnică (Bibl. SSMF), București, 1963.
41. Girard, G. ș.a., *Ale<sub>0</sub>-Geometrie*. (4 volume). E.D.P., București, 1973.
42. Gheorghiev, Gheorghe, *Despre grupuri geometrice și evoluția ideii de spațiu*. Probleme actuale de matematică. București, 1963.
43. Gheorghiev, Gheorghe și Miron, Radu, *Octav Mayer și programul de la Erlangen*. Simpozionul național „Gh. Tîlceica”, Craiova, 20–21 septembrie 1978, p. 71–81.
44. Gheorghiev, Gheorghe ș.a., *Geometrie analitică și diferențială*. (2 volume) E.D.P., București, 1968.
45. Gheorghiu, Gh. Th., *Elemente de algebră și geometrie analitică*. E.D.P., București, 1961.
46. Golab, S., *Über die Grundlagen der affinen Geometrie*. Jber. Deutsch Math. Verein, **71**, 3 (1969), 139–155.
47. Haimovici, Adolf, *Grupuri de transformări geometrice*. E.D.P., București, 1963 și 1968.
48. Haimovici, Adolf ș.a., *Elemente de geometrie a planului*. E.D.P., București, 1968.
49. Haimovici, Adolf ș.a., *Leții de geometrie elementară*. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1975.
50. Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1909 (sau, Open Court, La Salle, 1938 în limba engleză sau OGIZ, Moscova, 1948 în limba rusă).
- 50'. Ianuș, Stere ș.a., *Probleme de geometrie și de trigonometrie pentru clasele IX–X*. Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
51. Ion, D. Ion și Radu, Nicolae, *Algebra*. (Ediția III-a) E.D.P., București, 1981.
52. Kerekjarto, Bela, *Les fondements de la géométrie*. (2 volume). Akad. Kiadó, Budapesta, 1955–1956.
53. Kutuzov, B. V., *Geometria lui Lobacevski*. Ed. tehnică, București, 1952.
54. Liebeck, H., *The Vector Space Axiom  $l \cdot v = v$* . The Math. Gazette, **LVI**, 295 (1972), 30–33.
55. Lobacevski, Nikolai Ivanovici, *Cercetări geometrice cu privire la teoria liniilor paralele*. Ed. Academiei, București, 1952.
56. Macovei, Elena, *Melode de construcție pentru corpul numerelor reale*. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1982.
57. Mayer, Octav, *Geometrie proiectivă*. Ed. Academiei, București, 1970.
58. Melcu, Ion, *Geometrie proiectivă*. E.D.P., București, 1963.
59. Mihai, Alexandru, *Leții de geometrie*. Universitatea București, 1973.
60. Mihăileanu, Nicolae, *Elemente de geometrie proiectivă*. Ed. tehnică, București, 1966.
61. —, *Geometrie neeuclidiană*. Ed. Academiei, București, 1951.
62. —, *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*. Ed. tehnică, București, 1968. (biblioteca SSMF).
63. Miron, Radu, *Almost Affine Spaces over a Field*. An. științifice. Universitatea „Al. I. Cuza”, Iași, **XXIV**, s. I, 2 (1978), 327–341.
64. —, *Geometrie analitică*. E.D.P., București, 1976.
65. —, *Geometrie elementară*. E.D.P., București, 1968.
66. —, *Introducere vectorială în geometria analitică plană*. E.D.P., București, 1970.
67. —, *On the Almost Linear Spaces*. Mathematica, **18** (41), 2 (1976), 187–190.
68. —, *Sur quelques structures affines*. Dem. Math., **VI** (1973), 289–294.
69. —, *The Minimality of Weyl's System of Axioms for the Affine Geometry over an Unitary Ring*. An. științifice Univ. „Al. I. Cuza”, **XXIV**, s. I-a, 1 (1978), 15–19.
70. Miron, Radu și Opaî, Gheorghe, *Sur les espaces affines généralisés*. Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., **14** (1969), 653–660.
71. Miron, Radu și Radó, Francisc, *On the definition of a module and a vector space by independent axioms*. Mathematica, **18** (41), 2 (1976), 179–186.
72. Moise, E. Edwin, *Geometrie elementară dintr-un punct de vedere superior*. E.D.P., București, 1980.
- 72'. Moise, E. Edwin, Downs, Floyd L. Jr., *Geometrie*. Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
73. Myller, Alexandru, *Geometrie analitică*. E.D.P., București, 1972.
74. Neumann, Maria, *Bazele geometriei*. Lit. învățămîntului, Timișoara, 1956.
75. Neumann, Maria și Mihăileanu, Neculai, *Fundamentele geometriei*. E.D.P., București, 1973.
76. Obădeanu, Virgil, *Elemente de algebră liniară și geometrie analitică*. Ed. Facla, Timișoara, 1981.
77. Oproiu, Vasile, *Curs de geometrie*. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1981.
78. Pavlov, F. F. și Markusevici, V. P., *Trigonometria sferică*. Ed. tehnică, (bibl. SSMF), București, 1954.
79. Pic, Gheorghe, *Algebra*. E.D.P., București, 1966.
80. Pop, Ioan, *Curs de algebră*. Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, 1979.
81. Popescu, I. P., *Elemente de geometrie analitică*. (2 volume). Tip. Universității, Timișoara, 1978–1979.
82. Radó, Francisc, *On R-linear Spaces* (Manuscris încă nepublicat).
83. Raşevski, P. K., *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis* (1953). Deutsche Übersetzung, Berlin, 1959.
84. Rugină, Andrei, *Module neocomutative, Aplicații în informatică*. Teză de doctorat, Univ. „Al. I. Cuza”, Iași, septembrie 1982.
85. Rusu, Eugen, *Bazele teoriei numerelor*. Ed. tehnică, (Bibl. SSMF), București, 1953.
86. —, *Aritmetică și teoria numerelor*. Ed. tehnică, București, 1960 și E.D.P., București, 1963.
87. Sierpinski, Wacław, *Ce știm și ce nu știm despre numerele prime*. Ed. științifică, București, 1965.
88. Sâmbaoan, Gavril, *Fundamentele matematicii*. E.D.P., București, 1970.
89. Smaranda, Dumitru și Dragomir, Sorin, *Introducere în geometria axiomatică. Probleme rezolvate*. (Fasc. 1). Universitatea București, 1979.
90. Teleman, Costake ș.a., *Matematică. Geometrie și trigonometrie*. (manuale pentru clasele IX și X). E.D.P., București, 1977–1980.
91. Teodorescu, D. Ion, *Geometrie analitică și elemente de algebră liniară*. E.D.P., București, 1965 și 1972.
92. Triandaf, Alexandru ș.a., *Curs de aritmetică*. Lit. învățămîntului, Iași, 1957.
93. Udrîște, Constantin, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*. E.D.P., București, 1976.
94. Udrîște, Constantin ș.a., *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*. E.D.P., București, 1981.
95. Udrîște, N. Constantin, Bucur, M. Constantin, *Probleme de matematici și observații metodologice*. Facla, Timișoara, 1980.
96. Vinogradov, I. M., *Bazele teoriei numerelor*. Ed. Academiei, București, 1954.
97. Vrâncanu, Gheorghe, *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*. E.D.P., București, 1967 și 1974.
98. Vrâncanu, Gheorghe ș.a., *Geometrie elementară din punct de vedere modern*. Ed. tehnică, București, 1967.
99. Vrâncanu, Gheorghe și Teleman, Costake, *Geometrie euclidiană, geometrie neeuclidiană, teoria relativității*. Ed. științifică, București, 1965.
100. Węszelny, Tiberiu, *Farkas Bolyai, omul și matematicianul*. Ed. științifică, București, 1974.
101. Weyl, Herman, *Raum, Zeit, Materie*. Springer, Berlin, 1921.



## CUPRINS

## PREFAȚĂ

## CAP. I — ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| § 1. Algebra mulțimilor . . . . .        | 9  |
| § 2. Relații binare și funcții . . . . . | 9  |
| § 3. Numere cardinale . . . . .          | 12 |
| § 4. Numere ordinale . . . . .           | 14 |
|                                          | 19 |

## CAP. II — ARITMETICA

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| § 1. Mulțimea $N$ a numerelor naturale . . . . .    | 25 |
| § 2. Mulțimea $Z$ a numerelor întregi . . . . .     | 25 |
| § 3. Divizibilitatea în inelul întregilor . . . . . | 29 |
| § 4. Mulțimea $Q$ a numerelor raționale . . . . .   | 33 |
| § 5. Mulțimea $R$ a numerelor reale . . . . .       | 38 |
| § 6. Mulțimea $C$ a numerelor complexe . . . . .    | 42 |
|                                                     | 49 |

## CAP. III — TEORIA AXIOMATICE

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Sisteme deductive . . . . .                                                   | 52 |
| § 2. Metateoria unei teorii axiomatice . . . . .                                   | 52 |
| § 3. Axiomatica lui Peano a aritmeticii . . . . .                                  | 54 |
| § 4. Relația de ordine pe mulțimea $N$ . . . . .                                   | 57 |
| § 5. Analiza metateoretică a sistemului axiomatice al numerelor naturale . . . . . | 61 |
|                                                                                    | 62 |

## CAP. IV — BAZELE ALGEBRICE ALE GEOMETRIEI

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| § 1. Spații aproape liniare . . . . .     | 65 |
| § 2. Spații liniare reale . . . . .       | 65 |
| § 3. Spații aproape afine reale . . . . . | 71 |
| § 4. Spații afine reale . . . . .         | 75 |
| § 5. Spații euclidiene . . . . .          | 78 |
|                                           | 81 |

## CAP. V — BAZELE GEOMETRIEI EUCLIDIENE

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| § 1. Grupa I-a de axiome . . . . .    | 85 |
| § 2. Grupa a II-a de axiome . . . . . | 86 |
| § 3. Orientarea drepte . . . . .      | 88 |
|                                       | 90 |

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| § 4. Grupa a III-a de axiome . . . . .            | 95  |
| § 5. Grupa a IV-a de axiome . . . . .             | 102 |
| § 6. Grupa a V-a de axiome . . . . .              | 107 |
| § 7. Metateoria axiomaticei lui Hilbert . . . . . | 111 |

## CAP. VI — SISTEMUL AXIOMATIC AL LUI BIRKHOFF

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Cadrul general . . . . .                        | 117 |
| § 2. Axiome și principalele lor consecințe . . . . . | 118 |
| § 3. Elemente de metateorie . . . . .                | 126 |

## CAP. VII — TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| § 1. Generalități . . . . . | 130 |
| § 2. Izometrii . . . . .    | 131 |
| § 3. Simetrii . . . . .     | 132 |
| § 4. Vectori . . . . .      | 135 |
| § 5. Translații . . . . .   | 140 |
| § 6. Rotații . . . . .      | 141 |
| § 7. Omotetii . . . . .     | 145 |
| § 8. Inversuni . . . . .    | 149 |

## CAP. VIII — PROGRAMUL DE LA ERLANGEN

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| § 1. Spații Klein . . . . .                      | 155 |
| § 2. Geometrie afină plană . . . . .             | 157 |
| § 3. Planul proiectiv real . . . . .             | 162 |
| § 4. Geometrie proiectivă plană . . . . .        | 170 |
| § 5. Planul hiperbolic . . . . .                 | 175 |
| § 6. Complemente de geometrie absolută . . . . . | 188 |
| § 7. Geometrie hiperbolică plană . . . . .       | 200 |
| § 8. Trigonometrie hiperbolică . . . . .         | 211 |

## CAP. IX — SISTEMUL AXIOMATIC AL LUI BACHMANN

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Izometriile planului absolut . . . . .                             | 218 |
| § 2. Scufundarea planului absolut în grupul izometriilor sale . . . . . | 221 |
| § 3. Planul grupal . . . . .                                            | 223 |
| § 4. Consecințe ale axiomelor lui Bachmann . . . . .                    | 226 |
| § 5. Teorema perpendicularelor și aplicațiile ei . . . . .              | 229 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ANEXA 1: Conceptul de geometrie. Necesitatea axiomatizării geometriei . . . . . | 234 |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| ANEXA 2: Limite ale axiomaticei geometriei . . . . . | 238 |
|------------------------------------------------------|-----|

|                        |     |
|------------------------|-----|
| BIBLIOGRAFIE . . . . . | 243 |
|------------------------|-----|



În cadrul colecției "BIBLIOTECA PROFESORULUI DE MATEMATICĂ" a mai apărut:

1. **Bazele raționamentului geometrie** de D. Brnzei, E. Onofraș, S. Anița și Gh. Isvoranu, 1983.

Redactor: PIETRE MOCANU  
Tehnoredactor: AUREL BUDNIC

---

*Pun de tipar: 25.VI.1983. Format: 16/61 × 86. Coli  
de tipar: 15,5.*

C.Z. pentru biblioteci mari:  $\begin{cases} 511(01) \\ 51301 \end{cases}$   
C.Z. pentru biblioteci mici 51(01)

---



Întreprinderea poligrafică Informația  
str. Brezoianu nr. 23-25, București  
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA